BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
D
70
NAPOLI

Digitized by Google

INSTITUZIONI DINAMICHE

DI

GIAMBATTISTA SAVIOLI

CHER. REG. DELLA CONGREGAZIONE
DI S. PAOLO

Professore di Matematica nel Collegio Imperiale de' Nobili..

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO E. III NAPOLI

B. N. R. NAPOLIS

MILANO. MDCCLXXXIII.
APPRESSO GIUSEPPE GALEAZZI REGIO STAMPATORE.
Con Approvazione.

Digitized by Google

Digitized by Google

ALL' ILLUSTRISSIMO SIG. CONTE

GIAN-MARIO ANDREANI.

Uella parte, che io mi glorio di aver avuta nella felice Voſtra educazione, ILLUSTRISSIMO SIG. CONTE, e l' amorevolezza, colla quale avete ſempre riſguardate le mie premure ed ogni mia letteraria fati-

ca, mi danno un ragionevole ardire di presentarvi queſt' Opera, di cui a riguardo Voſtro principalmente in me nacque l' idea, e ne aſſunſi con vigore l' impreſa. Se io non aveſſi altro premio de' miei ſudori che quello del Voſtro aggradimento, io ſarei di queſto ſolo pago, e ſoddisfatto; poichè non ebbi altro di mira che di paleſare a Voi e al mondo l' altiſſima ſtima, che io ho del merito Voſtro ed il profondo oſſequio, che per ogni titolo Vi devo. Volontieri verrei quivi annoverando quelle rare Voſtre qualità, che sì mi hanno preſo l' animo, e che ſono chiare, e paleſi tanto a queſta illuſtre Metropoli di Lombardia, che Vi rendono in eſſa lo ſpecchio della più ſaggia nobile gioventù, ſe non temeſſi in parlandone, non piuttoſto veniſſi io a ſcemare che ad accreſcere quegli encomj, che giuſtamente il Pubblico Vi rende. Non vi ha in fatti Perſona, che non ammiri come negli anni ancor più floridi, poco o nulla curandovi di que' divertimenti, nei quali ſogliono altri occuparſi, tutto il genio Voſtro ſi porti a godere di una ſavia ed erudita converſazione, animata dalla più gioconda urbanità. Nem-

meno ſono tanto animoſo di volere eſporre i fregi della conſpicua Voſtra Famiglia, che di tanto ancora s' aumentano dalla degniſſima Conſorte Voſtra, in cui veggonſi uniti, e raccolti i pregi più diſtinti dello ſpirito, del cuore, e del ſangue; ma riſpetto, e onoro tacendo quanto ſarei inetto pure ad accennare col mio diſcorſo, il quale riuſcirebbe ancora poco grato alla Voſtra modeſtia, che ama più il merito che le lodi. Aggradite adunque, Chiariſſimo mio Mecenate, queſt' Opera, la quale è nata, e creſciuta come coſa Voſtra. Io vò attendere ſu di eſſa un giudizio maturo dal tempo; ma ad ogni modo mi luſingo che poſſa queſta vivere a lungo, ſe non pel merito che ha in ſe ſteſſa, almeno per i felici Voſtri auſpicj, ſe le preſterete quella benigna accoglienza, che far Vi degnate all'autore, il quale tutto s' offre e ſi dichiara,

Di Voi Illmo Sig. Conte

Umil.mo, Dev.mo, Obbl.mo Serv.re
Giambattiſta Savioli C. R. B.

Digitized by Google

Festina lente. *Suet.*, *in Vita Augusti*, *cap.* 25.

Digitized by Google

PREFAZIONE.

Non v' ha, a mio parere, dubbio alcuno eſſere la Dinamica una delle parti fondamentali, e più importanti di tutta la Fiſica, o ſi riſguardi il ſuo fine, od i vantaggi conſiderabiliſſimi, che da eſſa ſi ritraggono. Lo ſcopo in fatti di queſta ſcienza ſi è d' indagare e di ſtabilire, col ſuſſidio e colla guida delle Matematiche, le leggi generali del moto, ſenza la cognizione delle quali non vi ha certa norma di inveſtigare e di conoſcere la natura, che tutto mantiene, e produce con giuſta proporzione di forze, e quindi con certa e determinata diſtribuzione di moti. Che ſe grande è il fine, non ſono punto minori i vantaggi, che da eſſa quaſi rivi da fonte, diſcendono. Baſta aver dato uno ſguardo alle ſcienze Fiſico-matematiche per conoſcere chiaramente che la Dinamica è quella che ſomminiſtra i fondamenti all' Idraulica; deſſa che porge il miglior ſoccorſo all' Ottica, che ſerve di ſcorta, e di lume alla provvida Architettura, e che ſollevandoſi ancora ſecondo il uopo delle ſcienze più ſublimi, giugne a ſegnare colla ſagace Aſtronomia le vie del cielo, e che tutte in ſomma ci addita e appiana le ſtrade, per cui può ſcorrere l' umana intelligenza nella ſcoperta e cognizione dell' Univerſo. Chiara adunque ſi può vedere l' utilità di queſta nobiliſſima arte o ſi riſguardi in ſe ſteſſa, o ſi riferiſca ancora a tutta la Fiſica della terra, e del cielo. L' utile poi, che la Dinamica ci arreca ſi è di quel genere più diſtinto e pregievole, che a ſe lega e congiunge un particolare diletto, il che rende più agevole lo ſtudio, e la penetrazione di eſſa. E chi non prova realmente un ſingolare piacere nel mirare le tante e sì utili macchine coi lumi di queſta

ſcienza ritrovate a vantaggio, e comodo della Società, e molto più nell' intendere la ragione per cui ottienſi con eſſe l' effetto deſiderato, riconoſcendo a ſondo l' indole delle leggi, che la natura conſerva inalterabili in tutte le vicende, e cangiamenti, che in eſſa ſuccedono. Chi è che non ſi muova, e non riſenta un intimo compiacimento nel veder creſcere, e rifiorire le arti, che hanno in cura i comodi ed i più nobili piaceri dell' umana vita, e che formano la felicità più diſtinta delle colte nazioni. Ma non è punto difficile il riconoſcere dalla Storia Fiſica che queſte furono ſempre ampliate e riſtorate da' ſommi genj, che ſeppero dedurre la perfezione delle arti da certi principii e fondarla ſulle leggi delle forze e del moto, oſſia nell' indole della natura. Che ſe avviene talvolta che ſi veggano fare da Meccanici molti tentativi nell' arti, di cui non appariſce alcun eſito felice, che corriſponda all' aſpettazione, ciò ſenza dubbio accade, poichè molti ſi cimentano all' impreſa di produrre macchine non più vedute, di cangiare, e migliorare l' antiche, ſenza avere una ſufficiente cognizione della Fiſica, e delle Matematiche, le quali ſcienze ſono del tutto neceſſarie per iſtabilire una ſolida Teoria Meccanica, che all' una e all' altra di dette ſcienze eſſenzialmente ſi attiene. Imperciocchè per produrre opere, che ſorpaſſino la mera imitazione, e coſtruire machine lodevoli ed utili, non ſolo convien ſapere addattare le forze al conſeguimento del fine, che ſi deſidera, e quindi calcolarle rapporto alla direzione, con cui vengono applicate, e al tempo in cui devono operare, e al modo per cui variare poſſono la loro intenſità; ma conviene inoltre diſtinguere l' indole di queſte forze per riguardo alla loro durazione, la qualità della materia di cui ſi vuole

far uſo, le diverſe circoſtanze che ſi incontrano di luoghi e climi, ed altre ſomiglianti relazioni, che tutte poſſono influire nell' eſito felice di qualunque meccanico diſſegno. Chi adunque poſſedeſſe ſolo la Fiſica, potrebbe bensì egli fare delle macchine ſode e durevoli, e ben travagliate nelle loro parti; ma correrebbe poi riſchio che l' effetto non foſſe tale, quale egli ſe lo aſpettava. Così pure chi ſolo nelle idee matematiche ed aſtratte foſſe aſſorto, avrebbe egli giuſtiſſima norma di giudicare, e di formare una eſatta macchina; ma dalle linee e punti diſcendendo alla materia qual' è realmente, troverebbe ſicuramente qualche varietà per cui dalla ſtabilita Teoria gli converrebbe, giuſta la circoſtanze, alquanto variare. Finalmente chi nè Matematico foſſe nè Fiſico lavorerebbe aſſolutamente da cieco, e non potrebbe luſingarſi di riuſcire in ſimili impreſe, ſe non che a caſo e per mero accidente, e ciò quaſi ſempre dopo molti tentativi inutili e diſpendioſi. Non ſaprei però negare eſſerſi veduto qualche eſempio di Perſone, che ſenza aver coltivati gli ſtudj, guidate ſolo da un genio particolare dato loro da natura, hanno fatto opere conſiderevoli e degne di ammirazione. Ma ſono queſti eſempj rariſſimi di uomini, che la natura avaramente produce, e che ad ogni modo non vuole che reſtino occulti ed infruttuoſi, e ſi può di eſſi ſenza dubbio aſſerire che molto più avrebbero fatto ed eſeguito più ordinatamente, ſe al loro mirabile ingegno aveſſero aggiunto quella ſcorta e quel preſidio, che lo ſtudio delle ſcienze avrebbe loro ſicuramente ſomminiſtrato. Che ſe qualche eſempio pur trovaſi di perſone, le quali col ſolo naturale talento coltivatoſi da ſe ſolo, feccro opere prodigioſe, e aggiunſero nuove invenzioni all' arti, un numero ſenza paragone maggiore ſi troverà di

perſone ; che prive di un ſolido fondamento nelle mentovate ſcienze , e condotte dalla ſola preſunzione , aſſunſero impreſe conſiderabili di ſimil fatta , che o non ſeppero portare a felice termine , od anco n' ebbero un eſito triſte , e pernicioſo .

„ *Ho viſto* (così ſcrive il Sig. Gallileo Gallilei nella Introduzione alla ſua Meccanica) *ingannarſi l' univerſale dei*
„ *Meccanici nel volere a molte operazioni , di lor natura im-*
„ *poſſibili , applicar macchine della riuſcita , delle quali ed eſſi*
„ *ſono reſtati ingannati , ed altri parimenti ſono reſtati defrau-*
„ *dati della ſperanza , che ſopra la promeſſa di que' tali ave-*
„ *vano concepita : dei quali inganni parmi avere compreſo eſ-*
„ *ſere principalmente la cagione , la credenza che i detti artefici*
„ *hanno avuta ed hanno continuamente di potere con poca for-*
„ *za muovere ed alzare grandiſſimi peſi , ingannando in un*
„ *certo modo con le lor macchine la natura , iſtinto della quale ,*
„ *anzi fermiſſima coſtituzione è che niuna reſiſtenza poſſa eſſere*
„ *ſuperata da forza , che di quella non ſia più potente .*

Egli è adunque manifeſto eſſere coſa neceſſariiſſima di ben apprendere una ſolida Teoria Meccanica , corredata dai lumi delle ſcienze , per diſcendere in ſeguito alle pratiche operazioni di maggior importanza e cogliere così quei frutti , che da queſta utiliſſima e pregievoliſſima arte poſſono gli uomini derivare . Perſuaſi di tale verità i primi genj della Filoſofia , Ariſtotele , Carteſio , Newton , Gallileo , ed i ſommi uomini che lor vennero in appreſſo , Maclaurin , Eidero , d' Alembert , Friſio , e Zanotti , e tant' altri non iſdegnarono di ſvolgere principj della Meccanica e di fondarne una ſolida e facile Teoria , e diedero poi opera ſingolare per portare l' intiera Dinamica a quel ſegno , a cui la vediamo giunta a ſomma gloria

dei ſuoi coltivatori e con vantaggio immenſo delle ſcienze. Quindi moltiſſimi ſono i Trattati sì antichi che moderni di Dinamica, che finora hanno veduto la pubblica luce e tra queſti, altri ve ne ſono ſublimi e diffuſi, altri brevi ed elementari, con i quali queſta illuſtre ed eccelſa parte della Fiſica è ſtata in ogni ſecolo, appreſſo le più colte nazioni arricchita e nobilitata. Ma per quanto grande ſia il merito di eſſi non è da credere, ſecondo che io ſtimo, che abbiano voluto porre un limite a queſta ſcienza sì feconda di coſe e liberale dei ſuoi lumi, che nulla reſti a fare più oltre, o col darle qualche nuova forma, o coll' eſtendere le parti di eſſa, o coll' accreſcerne le relazioni. Se adunque il genio verſo le ſcienze di maggior pregio, e l' eſempio, e lo ſtimolo dei grandi uomini mi hanno portato a porre particolare ſtudio ed a meditare ſulle leggi Dinamiche, e ſe ora ne dò al Pubblico quei frutti qualunque eſſi ſieno, che ne ho raccolti, io mi luſingo che a neſſuno potrà parere non lodevole la mia fatica o non retto nel ſuo fine il mio animo. L' idea che mi ſono preſiſſo non è ſtata già quella di farmi autore di un libro, e molto meno di toglier punto alla fama di qualunque ſcrittore, ma bensì di render comune alla gioventù quella via che io ſteſſo ho ſperimentata piana, e facile per iſtruirſi ancor da per ſe nella ſcienza delle moltiplici leggi del moto, e per introdurſi allo ſtudio dell' Aſtronomia. Se queſta mia Opera poſſa ſervire all' intento io non ne aſcolterò il giudizio precipitato di taluno, che poſſa averne ſcorſa frettoloſamente qualche pagina; ma ne attenderò il giudizio ponderato del tempo, che ſuol dare delle Opere e degli Autori giuſta ſentenza.

Nella prima parte di queſt' Opera ſuppongo il Lettore informato ſoltanto della Geometria, e dei primi rudimenti dell'

Algebra. Nella ſeconda parte richieggo ancora una ſufficiente cognizione dell' Algebra degli infiniteſimi, oſſia del calcolo Differenziale ed Integrale. Siccome poi nella Dinamica è neceſſario di trattare quantità affatto eterogenee, mi è ſembrato quivi neceſſario di fare una avvertenza utiliſſima per i giovani, che ſi applicano a queſti ſtudj, per togliere ogni inciampo di difficoltà, in cui potrebbero di leggieri incorrere. Certa coſa è appreſſo tutti i Metafiſici, che ſi ignorano del tutto le aſſolute miſure delle fiſiche grandezze, e che ſi poſſono ſoltanto determinare le relative per una proporzione, che poſſono avere con una omogenea quantità, che ſi aſſume ad arbitrio per comune loro miſura. Queſte proporzioni ſi potranno generalmente eſprimere in numeri, e venendo una volta aſſegnata la comune loro miſura coll' unità, ſi potranno pure le altre grandezze dinotare con numeri, la ragione dei quali coll' unità eguagli la ragione delle ſteſſe grandezze colla comune loro miſura. Quindi uno ſpazio ſi dirà doppio, triplo; ed una velocità tripla, e quadrupla, ſe avranno queſte quantità una ragione doppia, tripla, o quadrupla della comune loro miſura. Sebbene poi le grandezze eterogenee non abbiano tra loro alcun reale rapporto ſi ſuole però da tutti gli ſcrittori ad eſſe attribuire quella proporzione, che paſſa tra le relative loro miſure, che ſi eſprimono con i numeri. Poichè preſe, a cagion d' eſempio, le eterogenee grandezze di velocità, e di ſpazio, e di tempo, eſpreſſe per V , S , T, *e aſſunte le comuni miſure* a, b, c, *ſaranno le relative loro miſure* $\frac{V}{a}$ $\frac{S}{b}$ $\frac{T}{c}$, *e varrà la proporzione* $V : S :: \frac{V}{a} : \frac{S}{b}$, *ſe le comuni loro miſure ſaranno eſpreſſe ſimilmente coll' unità. A queſti principj*

è appoggiato il metodo tenuto universalmente dai più valenti Matematici, e particolarmente del Kav: Newton di sostituire alle semplici proporzioni le equazioni e di moltiplicare, dividere e trattare le quantità eterogenee, comunque composte, e complesse tra loro, quasi fossero omogenee. Quindi si potrà stabilire che una grandezza V *è eguale ad un' altra eterogenea* S, *o ad una funzione qualunque di altre* S, R *ec., se la misura della grandezza* V *espressa in numeri sarà eguale alla misura della grandezza* S, *o ad una funzione delle grandezze* S, R *ec.; poichè si trova di fatti* $V = S$, *posto che sia l' unità del tempo all' unità dello spazio, come* T : S, *ossia* $\frac{V}{a} = \frac{S}{b}$. *Quando adunque si instituisce un paragone tra queste o consimili quantità eterogenee, e dalla proporzionalità si passa a stabilire tra loro una eguaglianza, si suppone sempre la mentovata unità di omogeneità, che toglie loro la naturale assimetria, e riduce una semplice proporzione ad una esatta eguaglianza.*

Essendo mio pensiero di comporre un' Opera elementare per uso della Nobile Gioventù di questo Imperiale Collegio ho voluto ancora dimostrare tratto tratto alcuni principj per evitare ai giovani studiosi la pena di rintracciarli, ed ho premesso a forma di Lemmi tutti quei Teoremi i quali non si trovano d' ordinario nei Trattati elementari di Sezioni Coniche, e che d' altronde dovevano supporsi nel decorso dell' opera. Qualche volta e massime a principio ho trattate le stesse materie colla Sintesi e coll' Analisi, e ciò per mostrare ai principianti la chiarezza Sintetica, e la brevità con cui opera l' Algebra nelle sue dimostrazioni. Alcune formole ed espressioni analitiche si sono da me svilluppate, e svolte alquanto più che non si soglia dai scrit-

tori matematici, perchè non abbiano ad inciampare i giovani principianti in oſtacoli miſterioſi di ſimil fatta, e diſperare quindi della loro riuſcita in queſte ſcienze. Molte dimoſtrazioni di Teoremi ho trovate ridotte a tanta eleganza, e chiarezza, che non pare quaſi poſſibile di più perfezionarle, e queſte io ho tolte da' ſopralodati Autori e particolarmente dal Kav. Newton e dall' egregia Opera della Coſmografia del Chiar. Abbate Friſio, in cui la Meccanica è portata alle più alte ſcoperte del cielo e della terra. Nell' atto poi di maneggiare varie formole mi ſi ſono preſentate alla mente alcune eſtenſioni, e parecchie diverſe deduzioni, che non ſaranno per avventura prive di novità e d' invenzione. A queſte darà il benigno Lettore quel peſo, che egli crederà, non eſſendo mia mente di raccoglier lodi, ma ſolo di appagare il mio genio con queſti ſtudj, e di procurare quanto è poſſibile di giovare ad altri. Se il Pubblico, come ſpero, aggradirà queſta mia preliminare fatica, prenderò ad ordinare e ripolire altre coſe da me già diſegnate, per preſentarle ſotto gli occhi dei benevoli Letterati, e mi terrò ſempre abbaſtanza pago delle mie applicazioni, ſe avrò in qualche parte contribuito al comodo degli ſtudioſi, ed alla felicità delle ſcienze.

DELLA

DELLA DINAMICA

PARTE PRIMA.

DEL MOTO RETTILINEO.

DEFINIZIONI.

LA *DINAMICA* è la ſcienza del moto. Il moto poi è una ſucceſſiva traſpoſizione di un corpo da un luogo all' altro. *Aſſoluto* diceſi quel moto, che ſi conſidera nello ſpazio immobile dell' Univerſo. *Relativo*, quello che ſi miſura dalla vicinanza di altri corpi.

La *Velocità* ſi è quella proprietà relativa del moto, per cui un corpo percorre in egual tempo un maggiore, o minore ſpazio.

La *Gravità* è quella propenſione, che hanno tutti i corpi di muoverſi naturalmente al baſſo, la quale ſi trova proporzionata alla maggiore, o minore quantità di materia, da cui ſono eſſi formati. *Aſſoluta* diceſi quella gravità, che eſercita la totale energía di ſua forza liberamente in un corpo. Diceſi poi *relativa*, quella che rimane ad un corpo dopo aver ſuperato un oſtacolo oppoſto.

Moto equabile ſi dice quello che mantiene ſempre la ſteſſa velocità, e per cui in tempi eguali ſi traſcorrono ſpazj eguali.

Moto accelerato ſi chiama quello, in cui ſi accreſce di continuo la velocità, coſicchè in egual tempo ſi traſcorra per eſſa maggiore ſpazio ſulla fine che ſul principio del moto. *Moto ritardato* ſi è quello, in cui accade il contrario,

Potenza diceſi tutta quella forza aſſoluta, la quale ſi impiega a muovere un qualche corpo, od a reſiſtere a qualche moto; quindi l'azione ancora di un peſo da ſe, può conſiderarſi come una potenza.

Momento ſi appella tutta quella forza relativa, che acquiſtaſi da un corpo in ordine al muovere, o al far reſiſtenza al moto, per ragione della maggiore, o minore velocità, che attualmente ad eſſo mobile compete.

Direzione della forza di una potenza ſi è quella linea retta, per cui un mobile è tirato, o ſpinto a muoverſi.

Centro del moto ſi è quel punto intorno a cui ſi muove un corpo, o l'aggregato di molti corpi.

Centro di gravità ſi definiſce eſſere in ogni corpo quel punto intorno a cui conſiſtono parti di eguale momento, coſicchè venendo in tale punto ſoſpeſo riman ſaldo, e quieto; quindi in queſto punto ſi conſidera come in propria ſede raccolto ogni impeto, e ſforzo della gravità di un ſolido.

ASSIOMI, O LEGGI GENERALI DEL MOTO.

I. Tutti i corpi tendono ad accoſtarſi quanto piú poſſono al centro di gravità della terra, e poſti in quiete da ſe non ſi muovono, quando il centro di loro gravità non poſſa diſcendere.

II. Ogni corpo conſerva il ſuo ſtato di quiete, o di moto per la ſteſſa direzione, con cui ha principiato a muoverſi, ſe non venga da altra forza obbligato a cangiare ſtato od alterarlo in qualunque maniera.

III. Eſſendo ſpinto un mobile in due parti direttamen-

te oppoſte da due eguali forze non cederà a veruna di eſſe, ma rimarraſſi fermo, e quieto.

IV. Viceverſa ſe un corpo rimane immobile tra più potenze, che in diverſe parti lo ſpingono, biſogna che i momenti di eſſe potenze, ſecondo qualunque direzione oppoſta, ſieno eguali.

V. Ogni mutazione di ſtato ſia di quiete, o di moto, che s'induca in un corpo è proporzionale alla forza motrice, e ſi dee fare per quella linea retta, ſecondo la quale è impreſſa la forza.

VI. Colla ſteſſa velocità movendoſi un corpo farà maggiore ſpazio in più lungo tempo, minore in tempo più breve, eguale in tempo eguale, ſuppoſto tutto d'altronde pari.

CAPO PRIMO.

DEL MOTO EQUABILE.

TEOREMA I.

1. NEl moto equabile gli ſpazj percorſi con eguale velocità, ſono proporzionali ai tempi.

DIMOSTRAZIONE. Suppongaſi che un dato corpo ſcorra in un dato tempo T lo ſpazio S, egli è chiaro che durando coſtante la ſteſſa velocità, dovrà percorrere in altrettanto tempo altrettanto ſpazio (*Aſs.* VI.), e preſo quindi qualſivoglia equemoltiplice del dato tempo T, per eſempio $2T$, ſi percorrerà dal mobile uno ſpazio egualmente moltiplice $2S$; e ſimilmente preſo un altro moltiplice di un altro tempo t per eſempio $4t$, ſi traſcorrerà uno ſpazio $4s$ egualmente moltiplice dello ſpazio s, e ſecondo che il tempo $2T$ ſarà mag-

giore, o minore del tempo $4t$, o ad esso eguale, riuscirà altresì lo spazio $2S$ maggiore, o minore od eguale allo spazio $4s$. Dunque si avrà la proporzione $2T : 4t :: 2S : 4s$, ossia saranno gli spazj, nella fatta Ipotesi, proporzionali ai tempi.

Ritenendo quindi le denominazioni superiori, si avrà generalmente, poste le velocità eguali, l'analogia $S : s :: T : t$.

TEOREMA II.

2. Presi eguali tempi, seguono gli spazj la ragione delle velocità.

DIMOSTRAZIONE. Si può quivi applicare la precedente dimostrazione, introducendo solo gli equemoltiplici delle velocità in vece degli equemoltiplici dei tempi, e nel resto argomentando come sopra.

Chiamando quindi le velocità V ed v, si avrà, nella fatta Ipotesi dei tempi eguali, la costante proporzione $S : s :: V : v$.

COROLLARIO I.

3. Non supposta eguaglianza di tempi o di velocità, saranno gli spazj in ragione composta dei tempi, e delle velocità. Poichè gli spazj sono proporzionali ai tempi, poste le velocità eguali, e sono proporzionali alle velocità posti eguali i tempi (*N.* 1; 2.). Dunque è manifesto, che non vi essendo eguaglianza di tempi o di velocità, seguiranno generalmente gli spazj la composta ragione delle velocità e dei tempi.

Ritenute ancora le denominazioni superiori, avrassi la generale proporzione risguardante gli spazj $S : s :: TV : tv$.

COROLLARIO II.

4. Gli ſpazj traſcorſi nel moto equabile ſi potranno eſprimere (*Fig.* 1.) per mezzo di rettangoli, i lati de' quali ci dinotino i tempi, e le velocità. Poichè ſe colle linee *AC* e *CD*, e coll' altre *CH* ed *HN* ſi formeranno due rettangoli *AD* ed *EH*, ſaranno queſti pure in ragione compoſta degli accennati lati, che ſono intorno allo ſteſſo angolo, oſſia in ragione compoſta delle velocità, e dei tempi, che ci ſi dinotino dagli ſteſſi lati. Ma gli ſpazj ſono pure nella ſteſſa ragione (*N.* 3.). Dunque ſi potranno gli ſpazj eſprimere per mezzo di rettangoli, che abbiano i loro lati proporzionali ai riſpettivi tempi, ed alle competenti velocità.

COROLLARIO III.

5. Se ſaranno i tempi in ragione reciproca delle velocità, gli ſpazj fatti ſaranno eguali. Imperocchè i rettangoli (*Fig.* 1.) *AM* e *DN*, formati dalle linee *AB* ed *AE*, *MN* ed *MD*, eſprimenti i tempi e le velocità reciproche, ſaranno eguali, avendo eſſi intorno ad un eguale angolo lati reciprocamente proporzionali. Ma gli ſpazj ſi poſſono eſprimere per mezzo di rettangoli, i lati dei quali dinotino i tempi, e le velocità (*N.* 4.). Adunque ſe i tempi ſaranno in ragione reciproca delle velocità, gli ſpazj percorſi ſaranno eguali.

Lo ſteſſo ſi può dedurre in altro modo, poichè per la fatta Ipoteſi ſarà $T : t :: v : V$; e però $TV = tv$. Ma ſi ha $S : s :: TV : tv$ (*N.* 3.). Dunque ſarà $S = s$.

COROLLARIO IV.

6. Viceverſa ſe ſaranno eguali gli ſpazj, ſaranno recipro-

che le velocità ai tempi. Poichè essendo eguali gli spazj, anche i rettangoli esprimenti questi spazj, e formati colle linee di velocità e di tempo, saranno eguali. Ma i rettangoli eguali hanno i lati intorno ad un eguale angolo reciprocamente proporzionali. Dunque, posti eguali gli spazj, saranno le velocità reciproche ai tempi.

Presa ancora l'analogia superiore $S : s :: TV : tv$ (*N.* 3.), è chiaro che se sarà $S = s$, s' avrà ancora $TV = tv$, e risolvendo avrassi $T : t :: v : V$.

COROLLARIO V.

7. Saranno ancora i tempi in ragione diretta degli spazj, e reciproca delle velocità; ed anco le velocità in ragione diretta degli spazj e reciproca dei tempi. Poichè posta ineguaglianza di tempi e di velocità, seguono gli spazj la ragione composta dei tempi, e delle velocità (*N.* 3.). Dunque dividendo queste ragioni prima per le velocità, indi per i tempi, rimarranno primieramente i tempi in ragione diretta degli spazj, e reciproca delle velocità, e in seguito si troveranno le velocità in ragione diretta degli spazj, ed inversa dei tempi.

Presa in fatti l'analogia superiormente stabilita (*N.* 3.) cioè $S : s :: TV : tv$, dividendosi gli antecedenti per V, ed i conseguenti per v, avrassi $T : t :: \frac{S}{V} : \frac{s}{v}$, e dividendo la stessa generica proporzione per T, e t, come sopra, risulterà $V : v :: \frac{S}{T} : \frac{s}{t}$

CAPO SECONDO.

DEL MOMENTO.

LEMMA.

8. DAto un qualſivoglia vette *AB* ſituato ſopra un punto d' appoggio *C* (*Fig.* 2) le velocità di due punti qualunque *A* e *D* ſaranno proporzionali ai bracci *AC* e *CD*, oſſia alle diſtanze di queſti due punti dal centro del moto.

DIMOSTRAZIONE. Le velocità ſono proporzionali agli ſpazj percorſi, ſuppoſti i tempi eguali (*N.* 2.): Ma gli ſpazj traſcorſi nello ſteſſo tempo dai due punti *A* e *D* ſono eſpreſſi dai ſimili archi di cerchio *AR* ed *ED*; e queſti ſono come i raggi *AC* e *CD*. Adunque le velocità di due punti qualunque *A* e *D* ſaranno proporzionali ai bracci da eſſi determinati ſul dato vette e ſi potranno eſprimere con i raggi riſpettivi, oſſia colle loro diſtanze dal centro del moto

TEOREMA I.

9. L' azione totale di un corpo, oſſia il momento è in ragione della maſſa moltiplicata per la ſua competente velocità.

DIMOSTRAZIONE. La forza motrice è quella, che produce la velocità in un corpo cui ſpinge al moto, e tanto maggiore debbe eſſere la ſuddetta forza quanto è maggiore la velocità del moto prodotto, e quanto ſono maggiori in numero gli elementi o parti che s' inveſtono di queſta ſteſſa velocità (*Aſſ.* v), oſſia quanto è maggiore la maſſa di un corpo in cui s' induce tal mutazione di ſtato. Dunque nel-

lo ſtimare l' azione, o forza totale di una potenza, o di un corpo ſi dovrà calcolare la maſſa moltiplicata nella velocità ad eſſa competente.

Denominando quindi le maſſe M ed m, ed i momenti, oſſia le forze totali F ed f ſi avrà $F : f :: MV : mv$

COROLLARIO I.

10. Se due eguali maſſe, ovvero potenze ſaranno applicate a muovere un corpo, od a reſiſtere a qualche moto, i loro momenti ſaranno proporzionali alle velocità riſpettive di eſſe. Poichè i momenti, o forze totali ſono come i prodotti delle maſſe moltiplicate per la velocità (*N.* 9): Ma le potenze o maſſe ſono quivi ſuppoſte eguali. Dunque tolti gli equemoltiplici di queſte reſteranno i momenti in ragione delle velocità.

Preſa in fatti la ſuperior formola $F : f :: MV : mv$, ſe ſi tolgono i due eguali fattori M ed m rimane $F : f :: V : v$.

COROLLARIO II.

11. Date in vece velocità eguali i momenti ſaranno proporzionali alle maſſe; poichè il momento A ſta al momento B in ragione compoſta diretta della velocità e maſſa dell' un corpo alla velocità, e maſſa dell' altro (*N.* 9.): Ma per Ipoteſi le velocità ſono ſuppoſte eguali. Dunque gli equemoltiplici di queſte ſi potranno togliere o traſcurare, e reſteranno i momenti in ragione ſemplice delle maſſe, oſſia delle potenze.

Preſa quivi ancora la proporzione ſuperiore $F : f :: MV :$

$MV : mv$, e tolte le quantità V ed v, che sono per Ipotesi eguali, rimane $F : f :: M : m$.

COROLLARIO III.

12. Se le masse saranno in ragione reciproca delle velocità, i momenti di esse saranno eguali. Imperocchè essendo date le velocità reciproche alle masse, il prodotto delle quantità di mezzo esprimerà il momento dell'un corpo, mentre il momento del secondo sarà espresso dalle estreme. (*N.9.*). Ma l'un prodotto si ragguaglia all'altro, per nota proprietà delle proporzioni Geometriche. Adunque se le velocità saranno reciproche alle masse, i momenti saranno tra loro eguali.

Nella Ipotesi data, si ha di fatti $M : m :: v : V$. Dunque sarà $MV = mv$. Ma sta $F : f :: MV : mv$. (*N.9.*). Adunque sarà $F = f$.

COROLLARIO IV.

13. Viceversa se i momenti di due potenze saranno eguali, saranno esse potenze, o masse in ragione inversa delle velocità. Imperocchè i momenti eguali si possono esprimere per mezzo di rettangoli eguali, formati da linee esprimenti le potenze e le velocità, come si è fatto parlando degli spazj (*N.* 4.). Ma i rettangoli eguali si possono risolvere in lati reciprocamente tra loro proporzionali, che in tale caso ci esprimeranno le masse e le velocità reciproche dei due corpi. Adunque se i momenti di due potenze saranno eguali, saranno esse potenze in ragione reciproca delle velocità.

Assumendosi ancora la formola stabilita nel Teorema,

cioè $F : f :: MV : mv$, è manifeſto che ſe ſarà $F = f$; ſarà ancora $MV = mv$, e riſolvendo avraſſi $M : m :: v : V$.

SCOLIO.

14. Si potrà ancora ſciogliere in diverſe altre guiſe, l' analogia generale ſtabilita nel Teorema precedente, per mezzo della diviſione, o riſoluzione dei due eguali prodotti $Fmv = fMV$, e ſi avranno per tal modo di leggieri altre relazioni ed eſpreſſioni, per il valor generale delle velocità e delle maſſe, come inerentemente al metodo ſinora uſato è facile a ciaſcuno di vedere.

CAPO TERZO.

DEL CENTRO DI GRAVITÀ.

TEOREMA I.

15. UN corpo ſoſpeſo (*Fig.* 3.) ad un ſoſtegno, intorno a cui liberamente poſſa muoverſi, allora ſolamente rimarrà fermo, quando la retta, che connette il centro di gravità del corpo col centro di gravità della terra ſi congiungerà col punto di ſoſtegno, coſicchè queſti tre punti ſieno in una medeſima retta.

DIMOSTRAZIONE. Sia il punto H centro di gravità del corpo $AFSR$, e s'intenda ſituato fuori della retta AD, che dal punto A di ſoſtegno è diretta al centro di gravità della terra, e ſi conduca la EH normale alla retta AD, e fatto centro in A deſcrivaſi l' archetto CH, il quale verrà a cadere ſotto l' Orizzontale EH. Il centro di gravità di un

corpo cerca d' accoſtarſi, quanto può, al centro di gravità della terra (*Aſs.* 1.). Conſiderandoſi quindi raccolto tutto il peſo del corpo nel punto *H*, ſarà eſſo corpo lontano dalla maſſima vicinanza, che può ottenere col centro della terra, per tutto l'archetto *HC*, o più veramente per la picciola porzione di raggio *CE*. Adunque ſe ſi ravvolgerà un tal grave liberamente intorno al punto *A* di ſoſtegno, non dovrà rimanere ſtabile e fermo, ſe non quando il punto *H* avrà ottenuto il luogo della maſſima vicinanza poſſibile col centro della terra, oſſia quando ſarà giunto in *C* punto eſtremo del raggio *AC*, ſituato ſulla retta *AE*, che congiunge inſieme il punto di ſoſtegno ed il centro di gravità della terra. Adunque un corpo ſoſpeſo ad un ſoſtegno, intorno a cui liberamente poſſa muoverſi, allora ſoltanto rimarrà fermo quando la retta ec.

COROLLARIO I.

16. Sarà quindi facile coſa lo ſtabilire un metodo meccanico, per trovare il centro di gravità in un piano comunque irregolare (*Fig.* 3; 4.). Per ciò vedere s' intenda ſoſpeſo ad un filo il piano *FR*, che ſi ſuppone eſſere il dato, ed alla ſommità di eſſo, per cui reſta appeſo, cioè in *A* ſi accoſti un altro filo, a cui ſia anneſſo un picciolo peſo *P*, e ſi ſegni la retta *AD* coperta da eſſo filo. Noi ſaremo quindi ſicuri, per il Teorema precedente, che in eſſa retta ſi trova il centro di gravità del piano.

Di nuovo per un altro punto per eſempio in *F* ſi ſoſpenda lo ſteſſo piano, ed alla ſommità ſi applichi un filo carico del peſo *P*, e ſi ſegni la retta *FI* coperta da eſſo fi-

lo, nel punto d' interſezione *S* colla retta *AD*, ſaravvi il centro di gravità ricercato, dovendo eſſo centro, per egual ragione, appartenere a tutte e due queſte rette.

COROLLARIO II.

17. Lo ſteſſo metodo non potrà ſervire per trovare il centro di gravità di un ſolido, dovendo queſto d' ordinario trovarſi nell' interne parti di eſſo, e non nella eſteriore ſuperficie; ſi potrà però col metodo accennato, determinare anco in un ſolido, un punto nella ſuperficie di eſſo, imminente al centro di gravità, e tale che venendo il ſolido in eſſo punto ſoſpeſo, rimarrà equilibrato.

COROLLARIO III.

18. Per determinare poi il vero centro di gravità di un ſolido (*Fig.* 5.), ſi trovi prima il centro di gravità di una ſuperficie, col metodo poc' anzi additato; quindi la ſteſſa meccanica operazione ſi faccia nella ſuperficie contrrapposta, ſoſpendendo il grave ai due punti, che hanno ſervito per la prima. Se ſi intenderà poi che paſſino due piani a congiungere le linee contrappoſte nelle due ſuperficie, è manifeſto, per il Teorema, che nella linea di comune interſezione di queſti due piani, ſi dovrà trovare il centro di gravità del dato ſolido; ſi applichi poſcia lateralmente al punto di ſoſtegno *S* il filo, cui ſta anneſſo il piombo *P*, e ſi marchi la retta *SE* indicata da eſſo filo, e lo ſteſſo ſi compia in un altra faccia laterale. Se ſi farà quindi traſcorrere per *SE* un piano, che vada ad incontrare la retta ſegnata nell' al-

tra ſuperficie laterale; nel punto d'interſezione *G* di queſto piano colla retta *CH*, comune ai due primi, ſi troverà il centro di gravità di tutto il ſolido, dovendo eſſo trovarſi in tutti e tre i piani, o ſezioni indicate.

COROLLARIO IV.

19. Se ſi intenderà abbaſſata dal centro di gravità di un corpo qualunque *ABCD* (*Fig. 6.*) la retta *GO* normale all' Orizzonte, uſcendo queſta fuori della baſe *AB*, il corpo non potrà reggerſi e rimanere ſaldo; e reggeraſſi ſolo nel caſo che tale retta tagli o tocchi la ſua baſe. Poichè nel primo caſo la linea, che connette il centro di gravità del corpo col centro della terra non ſi congiunge con alcun punto di ſoſtegno; laonde il corpo non potrà reggerſi e ſtare fermo nel ſuo ſtato ſul piano Orizzontale *MN*, pel Teorema precedente; nel ſecondo caſo poi rimarrà ſtabile e fermo il corpo, poichè i due punti o centri di gravità della terra e del ſolido ſi congiungeranno con qualche punto della baſe in una ſteſſa retta.

PROBLEMA I.

20. Aſſegnare il centro di gravità di un Triangolo qualunque *ABC* (*Fig. 7.*).

Risoluzione. Si divida per metà il lato *AB* in *E*, e ſi conduca all' angolo oppoſto *C* la retta *CE*, e diviſo pure per metà il lato *CA*, dal punto di mezzo *D* ſi tiri la retta *BD*, che taglierà la *CE* in qualche punto *G*, il quale ſarà il centro di gravità ricercato. Imperocchè dividendo le due

rette *CE* e *DB* per metà il triangolo *ACB*, e tutti i suoi elementi, dovrà il centro di gravità ritrovarsi in qualche punto della retta *CE*, e in qualche punto similmente della linea *DB* (*N.* 16.), e perciò verrà a cadere in un punto comune a tutte e due. Questo punto *G* poi si troverà distante da *E* per un terzo di tutta la *CE*; poichè congiunti i punti *D* ed *E* colla retta *DE*, sarà questa parallela a *CB*, e sarà quindi *CB* doppia di *DE*, siccome *CA* è doppia di *DA*. Essendo poi simili ancora i triangoli *DGE* e *CBG*, sarà *EG* : *GC* :: *DE* : *CB*. Dunque *GC* sarà doppia di *EG*, siccome *CB* è doppia di *DE*, e quindi *GE* sarà una terza parte di tutta la *CE*; e però il punto *G*, ossia il centro di gravità del triangolo sarà distante da *E* per $\frac{1}{3}$ di *CE*.

PROBLEMA III.

21. Determinare il centro di gravità in una Piramide qualunque triangolare (*Fig.* 8.).

Risoluzione. Sia la piramide triangolare *ABCD*, e tirati i diametri *EC* ed *AE* nei due triangoli *BDC* ed *ABD*, e tagliate le rette *EH* ed *EF*, per modo che sieno una terza parte dei suddetti diametri, dal punto *F* si conduca la *FC*, e dal vertice *A* si abbassi la *AH*; queste rette verranno a intersecarsi in qualche punto *I*, in cui sarà situato il centro di gravità della proposta piramide. Imperocchè passando la *AH* per tutti i centri di gravità delle sezioni triangolari parallele alla base *BDC* (*N.* 20.), dovrà in essa retta trovarsi il centro di gravità della piramide. Ma tale centro deve essere ancora nella retta *FC*, che passa per

i centri di gravità di tutte le ſezioni triangolari parallele al triangolo *ABD*. Dunque il centro di gravità della Piramide data ſi troverà nel punto comune *I* d' interſezione delle due aſſegnate rette. Queſto centro di gravità ſarà poi lontano dal punto *H* ſituato nella baſe, per la quarta parte di *HA*; poichè condotta la retta *HF*, ſaranno ſimili trà loro i due triangoli *FEH* ed *AEC*, eſſendo *FH* parallela ad *AC*. Sarà dunque *CE* : *EH* : : *CA* : *FH*. Ma *EH* è una terza parte di *EC*. Dunque *FH* ſarà pure una terza parte di *CA*. Per i triangoli pure ſimili *FIH* ed *AIC*, ſta *HF* : *CA* : : *HI* : *AI*, e perciò *HI* ſarà una quarta parte di *AH*, oſſia il punto o centro di gravità *I*, ſarà diſtante dal punto *H* della baſe per la quarta parte di *AH*.

PROBLEMA III.

22. Dati due corpi conneſſi con un vette, trovare il punto ove cada il comune centro di loro gravità.

RISOLUZIONE. Si divida il dato vette (*Fig. 9.*) *AB* in ragione reciproca alle maſſe dei due dati corpi *A* e *E*, così che ſtia il peſo del primo, al peſo del ſecondo, reciprocamente come il braccio *BC*, al braccio *CA*. Il punto della diviſione *C* così determinato nel vette, ſarà il centro di gravità ricercato. Poichè ſupponendoſi il vette *AB* inflеſſibile e ſenza peſo, e venendo ſoſtenuto il punto *C*, avranno i corpi intorno ad eſſo punto eguale momento (*N.* 8; 12.), ed otterranno equilibrio tra loro (*Aſs. III.*); e perciò in *C* troveraſſi il centro di gravità ad eſſi corpi comune.

COROLLARIO I.

23. Si potrà quindi ſimilmente trovare il centro di gravità di tre dati corpi, che vengano conneſſi tra loro. Siano dati i tre corpi *A*, *B*, e *D* (*Fig.* 9.), e s' intenda ſoſpeſo il corpo *A* ad un eſtremo del vette *BA*, ed il corpo *B* all' altro, e ſia il terzo *D* ſoſtenuto all'eſtremità di un altro vette *DC*. Trovato il centro di gravità dei due primi, come ſopra, ſi connetta il ſecondo vette al primo nel punto *C*, ove cade il centro di gravità dei due primi, per modo che i tre corpi *A*, *B*, *D*, ſiano conneſſi inſieme dalle due aſte, o vetti, che li reggono, e che raffigurano quivi due fili rigidi e ſenza peſo. Si faccia quindi la proporzione: come ſta la ſomma de' due corpi *B* ed *A* conſiderati in *C*, alla maſſa del corpo *D*, così ſtia la diſtanza del corpo *D* dal centro ricercato, alla diſtanza del punto *C* dallo ſteſſo centro, oſſia dividaſi le retta *CD* in ragione reciproca della ſomma dei due corpi *B* ed *A*, al grave *D*; e il punto *G* per tal modo determinato nel vette *DC*, ſarà il centro di gravità, che ſi ricerca; poichè troveranſi i momenti dei dati corpi intorno a queſto punto eguali (*N.* 8; 12), e otteranno quindi tra loro equilibrio.

COROLLARIO II.

24. Dato ancora qualſivoglia numero di corpi, ſi potrà determinare nell'aſta, che li ſoſtiene, il punto intorno a cui tutti ſi debbono equilibrare (*Fig.* 10.). Si diſpongano a tal fine i corpi *A*, *B*, *C*, *D* nel modo indicato nella Figura

od

od anche ad arbitrio comunque, nell' aſta *AB* raffigurante una linea Geometrica, e ſi trovi prima il centro di gravità dei due corpi *A* e *C* nell' aſta parziale che li ſoſtiene, col metodo aſſegnato nel Problema, e chiamando tale punto *P*, in eſſo ſi conſideri raccolto tutto il peſo dei due corpi *A* e *C*. Si cerchi quindi il centro di gravità dei due corpi *A* e *C* conſiderati in *P*, e del terzo corpo *D*, e determinato tale centro in *M*, ſi conſideri in eſſo punto l'aggregato e la ſomma dei peſi dei tre dati corpi *A*, *C*, *D*. Ciò fatto facile coſa ſarà di aſſegnare il centro di gravità dei quattro dati corpi *A*, *B*, *D*, *C*. Si faccia a tal fine la proporzione, come ſta la ſomma dei tre corpi *A*, *C*, *D* conſiderati in *M*, al grave *B* ſituato nell' altro eſtremo del vette, così ſtia il braccio e quindi la velocità (*N.* 8.) che competer deve al grave *B*, al braccio o velocità competente agli altri tre ſituati in *M*, oſſia dividaſi il vette *MB* in ragione inverſa della ſomma dei tre corpi *A*, *C*, *D* al grave *B*, e il punto *G* che ſi determinerà da tale proporzione ſarà il centro di gravità ricercato, intorno a cui avranno i corpi eguale momento (*N.* 12.) e formeranno (*per l' Aſs.* 3.) tra di loro equilibrio.

TEOREMA II.

25. Il centro di gravità di una ſuperficie, ovvero di uno o più corpi inſieme conneſſi non può trovarſi che in un ſol punto, ſtante lo ſteſſo collocamento di eſſi (*Fig.*10.).

DIMOSTRAZIONE. Due linee rette tra loro ovvero una retta con un piano non ſi poſſono interſecare di lor natura che in un punto ſolo; Ma tale interſecazione è quella che

ci determina il centro di gravità di un piano, o di un ſolido (*N.* 16; 18.). Dunque il centro di gravità di una ſuperficie, o di un corpo non può eſſere che in un punto ſolo.

Per riguardo poi a più corpi, ſia il centro di più corpi *A*, *B*, *C*, *D* ſituato in *G*, e ſi ſupponga per impoſſibile eſſere ancora in *M*, durante lo ſteſſo loro collocamento. Eſſendo *G* il vero centro di gravità (*N.* 24.) ſarà il ſolo momento del grave *B* eguale alla ſomma dei riſpettivi momenti dei tre corpi *A*, *C*, *D*. Supponendoſi poi tale centro ancora in *M*, riuſcirà il momento del corpo *B* maggiore per l' accreſciuta velocità e per l' aggiunto momento del grave *D*, e minori per l' oppoſta ragione riuſciranno i momenti dei corpi *A* e *C*, eppure il momento dei due corpi *B* e *D* ſarà eguale al momento dei due ſoli gravi *A* e *C*, oſſia una parte ſarà maggiore del tutto, il che è aſſurda coſa. Adunque il centro di gravità di più corpi ancora inſieme conneſſi non può trovarſi che in un ſol punto, ſtante lo ſteſſo collocamento di eſſi.

CAPO QUARTO.

DEL MOTO COMPOSTO DA PIU' EQUABILI,

oſſia della compoſizione e riſoluzione del moto.

LEMMA.

26. SE ad un mobile ſpinto colla forza e direzione *AD* ſopravverrà nel punto *A* (*Fig.* 11.) un' altra forza eſpreſſa per *AB*, la di cui direzione faccia con *AD* angolo retto, il

corpo proſeguirà ad accoſtarſi alla retta *DC*, come ſe non aveſſe ricevuto impulſo alcuno di forza per *AB*.

DIMOSTRAZIONE. Si prolunghi *DA* in *E*; eſſendocchè la forza *AB* viene ſuppoſta perpendicolare ad *AD* ſarà egualmente inclinata verſo *AD* che verſo *AE*. Diſtruggendoſi adunque queſte azioni eguali e contrarie, il mobile ſeguirà ad allontanarſi dalla retta *AB*, come ſe per *AB* non aveſſe ricevuto impulſo di forza alcuna.

TEOREMA I.

27. Se due forze, le quali ſi incontrano ad angolo retto ci verranno eſpreſſe per i due lati di un rettangolo, l'intenſità e la direzione della forza compoſta che ne riſulterà, ſi dovrà eſprimere per la diagonale del medeſimo.

DIMOSTRAZIONE. Sia il corpo nel punto *A*, e ſi intendano impreſſe le due forze ſecondo la direzione delle rette *AB AD*, a cui ſiano pure le dette forze proporzionali; il mobile in vigore della *AD*, dopo un dato tempo ſi troverà in qualche punto della retta *BC*, e per l' altra forza *AB* dovrà trovarſi in qualche punto della retta *CD*, o ſiano le forze impreſſe inſieme, ovvero ſeparatamente, per il Lemma precedente; impreſſe pertanto inſieme le forze, nella fine dello ſteſſo tempo ſi troverà il mobile nel concorſo delle due rette *CB* e *CD*, e perchè ogni moto che deriva da forze impreſſe una ſol volta ſi fa per linea retta (*Aſs.* v.), il corpo portandoſi da *A* in *C* ſcorrerà la diagonale *AC* del rettangolo *ABCD*. Dunque ſe due forze ec. ec.

COROLLARIO I.

28. La forza quindi che agiſce ſecondo la Diagonale *AC* del rettangolo *ABCD* equivalerà alle due forze, che agiſcono con direzioni ed intenſità corriſpondenti ai due lati di eſso. Poichè ſupponendoſi retto l' angolo delle direzioni delle due forze, il mobile congiunte le due forze ſcorrerà la diagonale nello ſteſso tempo, in cui avrebbe percorſi i lati con forze ſeparate (*N.* 27.), cioè le due forze eſpreſse per i lati del rettangolo equivaleranno ad una ſola forza eſpreſsa per la diagonale, ed a queſta le due, ed a queſte quella potraſſi ſoſtituire, poichè mentre il corpo ſi move per la diagonale *AC*, nello ſteſso modo ſi allontana per gli ſpazj *DC* e *BC* dai lati *AD* ed *AB*, e queſti due movimenti facendo angoli retti tra loro non ſi poſsono l' un l' altro ſturbare. Siccome adunque dai due moti *AB* ed *AD*, uno ſolo ne riſulta *AC* compoſto, così l' un moto *AC* ſi potrà riſolvere nei due *AB* ed *AD*.

COROLLARIO II.

29. Se al mobile ſituato nel punto *A* ſi imprimeranno le due forze *AB* ed *AD* (*Fig.* 12; 13; 14), ancorchè l' angolo delle direzioni di eſse forze ſia acuto od ottuſo, compito il parallelogrammo, la forza compoſta che ne riſulterà ſi potrà eſprimere per la diagonale del medeſimo (*); Poi-

(*) L' applicazione della ſuperiore dimoſtrazione a tutti i caſi dei differenti angoli è dovuta al Ch. Abbate Friſio.

chè ſia primieramente acuto l'angolo *BAD* (*Fig.* 12.), che eſprime le direzioni delle due forze *AB* ed *AD*, e ſi abbaſſino le normali *BG* e *DF* ſulla *AC*, la forza *AB* equivarrà alle due *AG* e *GB*, e la forza *AD* alle altre due *AF* e *DF* (*N.* 28.). Eſſendo poi eguali i due triangoli *DAF*, *GBC*, aventi oltre un angolo retto i due angoli *DAF*, *GCB* eguali ed il lato $AD = BC$, ſarà ancora $GC = AF$, e *DF* eguale e contraria a *GB*. Dunque le due forze *DA* ed *AD*, equivaleranno alla ſola *AC* diagonale del dato parallelogrammo.

Che ſe l'angolo *BAD* (*Fig.*13.) ſarà ottuſo, e l'angolo *DAC* retto, ſi potrà riſolvere la forza *DC* (*N.* 28) nelle due *DA* ed *AC*, ed eſſendo *BC* eguale e contraria a *BA* ſola rimarrà la forza *AC*, oſſia dalle due *AB* ed *AD*, ſola riſulterà la diagonale *AC* del parallelogrammo *ABCD*.

Se l'angolo poi *DCA* (*Fig.*14.) ſarà ottuſo, il perpendicolo *DF* cadrà nella Diagonale prolongata fuori del parallelogramo *ACBD*, e la forza *AD* ſi potrà riſolvere nelle due *DF* ed *AF*, e la forza *BA* nelle due *BG*, e *GA*. Eſſendo poi eguali i due triangoli *BGA*, *CDF* per aver eſſi uno angolo retto in *F* e in *G*, e l'angolo $GAB = DCF$, e i lati *BA* e *CD* oppoſti al retto eguali, le forze *GA*, e *CF* ſiccome ancora le *BG* e *DF*, eguali e contrarie tra loro ſi elideranno, e ſola rimarrà la forza *AC* eſpreſsa nella diagonale, la quale ſarà equivalente alle due *AD* e *BA*. Sempre adunque le due forze eſpreſse dai due lati contigui di un parallelogrammo equivaleranno ad una ſola eſpreſsa nella diagonale dello ſteſso, e congiunte le forze a qualunque angolo, il mobile percorrerà la diagonale nel tempo in cui avrebbe percorſi i lati ſeparatamente.

COROLLARIO III.

30. Viceverſa una forza compoſta eſpreſsa per la diagonale di un parallelogrammo qualunque (*Fig.* 15.) ſi potrà riſolvere in altre, ed equivalerà alle due che agiſcono con direzioni ed intenſità corriſpondenti ai due lati contigui di eſso. Poichè ſia primieramente acuto l' angolo *DAB*, e ſi compia il rettangolo *ALCH* intorno ai punti *A* e *C*. La forza *AC* potrà riſolverſi in altre due *AL* ed *AH*, oſſia nelle tre *AL*, *AD*, *AH* (*N.* 28.); ma *AL* e *DH*, oſſia *AL* ed *LB* impreſse nel punto *A* compongono la *AB* (*N.* 28.). Dunque la forza *AC* ſi potrà riſolvere nelle due *AD* ed *AB*.

Che ſe l' angolo *DAB* ſarà ottuſo, ſi prolunghi la ſua diagonale in *P*, (*Fig.* 16.) per modo che condotta poi *PB* ſi abbia l' angolo *PBC* parimenti ottuſo, e compito il parallelogrammo *PBCF* l' angolo *BPF* ſia acuto. Per il caſo antecedente la forza *PC* ſi potrà riſolvere nelle due *PB* e *PF*, e compito l' altro parallelogrammo *PABO*, ſe gli angoli *CAB* ed *APO* ſaranno acuti, la forza *PB* medeſimamente ſi potrà riſolvere nelle due *PA* e *PO*, e tolta la comune *PA*, la forza *AC*, riſolveraſſi nelle due *AB* ed *AD*.

Se poi i due angoli *DAB*, e *CAB* ſi troveranno ottuſi, ſi dovrà per modo prolungare *CA* (*Fig.* 16.) che l'angolo *BPO* divenga acuto, e allora la forza *PB* ſi potrà riſolvere nelle due *PA* e *PO*, per il Caſo I del Corollario II, il che poſto la forza *PC* ſi riſolverà nelle tre *PA*, *AB* ed *AD*, e la forza *AC* nelle due *AB* ed *AD*.

Generalmente adunque la forza che ſi eſprime per la Diagonale di un parallelogrammo ſi potrà riſolvere in due, che ci vengono eſpreſse dai due lati contigui di eſso.

SCOLIO.

31. Se le addotte ragioni riſguardanti la compoſizione e la riſoluzione del moto, non baſtaſſero ad appagare la immaginazione di alcuno, ſi può ancora porre ſott' occhio lo ſteſſo principio con una pratica, e meccanica oſſervazione, la quale mette in chiara viſta la verità di queſto Teorema.

Sia una regola *AB*, e ſi ſupponga al principio di eſſa regola nel punto *A* (*Fig.* 11; 12; 13) poſta una formica, o altro mobile, che ſcorra con equabile moto al lungo di eſſa. Nello ſteſſo tempo, ſuppongaſi eſſa regola traſportata o dal corſo placido di un fiume, o da altra forza comunque applicata equabilmente, coſicchè ſcorra un dato ſpazio, tenendoſi ſempre parallela alla prima ſua poſizione. Sia poi *AD* lo ſpazio, che percorre la regola nel tempo, che la formica impiega a ſcorrere tutta la retta *AB*. Chiara coſa è a vederſi che alla fine del dato tempo ſi troverà la formica nel punto *C*, ed eſſendo eſſa partita dal punto *A*, ſcorrendo ſempre per una retta, giunta in *C* avrà percorſo la diagonale del parallelogrammo *BD*, non v'eſſendo altra retta, che vada dal punto *A* al punto *B*, eccetto che la diagonale del parallelogrammo *BADC*. Ciò poi deve accadere qualunque ſia l' angolo, che riſulti nel parallelogrammo dalla poſizione della regola, per rapporto alla direzione della forza, che la fa muovere, oſſia retto, ovvero obbliquo. Dunque generalmente due forze congiunte ad un angolo qualunque, ſpingeranno il mobile per la diagonale del parallelogrammo, che venga formato ſulle linee eſprimenti la direzione, e l' intenſità di eſſe forze.

Sarà ancora la diagonale equivalente ai due lati contigui di un parallelogrammo; poichè la formica per arrivare al punto *C* ha dovuto ſcorrere tutto il lato *AB*, ed ha ſcorſo ſimilmente con moto relativo il lato *AD*, ed al momento che gli ha ſcorſi tutti e due, ſi trova all'eſtremo della diagonale. Ma le forze totali, ſono come le velocità, ſuppoſta la ſteſſa maſſa o eguali maſſe (*N.* 10.). Dunque la detta forza ſi potrà eſprimere e per la diagonale, e per i due lati contigui di un parallelogrammo, venendo percorſa nello ſteſſo tempo, e colla ſteſſa velocità la diagonale, con cui ſono percorſi ſeparatamente i due lati ad eſſa adjacenti.

Di queſta riſoluzione di forze ne abbiamo eſempj ne' corpi, che reſtano appoggiati a due piani inclinati mobili, ed in altri conſimili caſi.

SCOLIO II.

32. Da quanto ſi è detto fin ora della compoſizione e riſoluzione delle forze, ſi fa manifeſto, che un mobile ſpinto da due forze congiunte ad un angolo qualunque, ſeguirà ſempre la diagonale di un parallelogrammo formato ſulle linee di direzione di eſſe forze, e da' lati ad eſſe forze pure proporzionali. Siccome poi le forze eſpreſſe nella loro direzione e intenſità dai due lati contigui di un parallelogrammo, ſi contrappongono e ſi elidono in parte, nel caſo che formino un' angolo ottuſo, e non ſi diſturbano punto nel caſo che concorrano ad angolo retto; la diagonale quindi dagli ſteſſi lati compoſta riuſcirà minore, unendoſi le forze ad angolo ottuſo, che incontrandoſi ad angolo retto, e maggiore ancora, che non in queſt' ultimo caſo, riuſcirà

ſcirà, quando ſiano poſti gli ſteſſi lati ad angolo acuto, nel qual caſo le forze coſpirano e tendono piuttoſto ad unirſi in una ſteſsa direzione. Così ſe una forza compoſta, eſpreſsa per una diagonale, ſi riſolverà nei due lati poſti ad angolo ottuſo riuſciranno queſti maggiori, che riſolvendoſi la ſteſsa forza o diagonale in altri due lati poſti ad angolo retto; ma ſi contraporranno con qualche eliſione di moto nel primo caſo le due forze eſpreſse dai due lati, e non nel ſecondo. Riſolvendoſi poi la ſteſsa forza in due lati poſti ad angolo acuto riuſciranno ancora minori che nel caſo in cui ſiano poſti ad angolo retto; ma le forze così congiunte anderanno ſempre più coſpirando nella ſteſsa direzione, quanto ſarà più acuto l'angolo; coſicchè, conſiderate le forze ſole che agiſcono in una ſteſsa direzione, e ſottratte le forze elidentiſi o diſperdentiſi per la contraria o diverſa direzione, ſi avrà ſempre la ſteſsa ſomma o quantità di forza nella diagonale, e nei due lati contigui di un qualunque parallelogrammo formato intorno alla ſteſsa diagonale. Sarà dunque coſa per ſe indifferente il riſolvere una forza eſpreſsa per una diagonale o retta qualunque in due lati congiunti a qualſiſia angolo, purchè appartengano ad un parallelogrammo formato intorno alla data retta che ſerva al eſso di diagonale, eſsendoſene dimoſtrata la equivalenza in tutti e tre i caſi.

Che ſe alcuni credettero di trovare nella compoſizione delle forze l'effetto minore della cauſa, e maggiore nella riſoluzione, il loro errore (come ben avverte il celebre Abbate Friſi nella ſua Meccanica) naſce dal non aver eſſi paragonato l'effetto che ſi produce in una data direzione alla cauſa che agiſce in una direzione diverſa. Ridotto il paragone alla ſteſsa direzione, è manifeſto che la forza compo-

ſta ſecondo la diagonale produce ſempre lo ſteſso effetto che le forze eſpreſse ſeparatamente per i lati potrebbero produrre, ſecondo la direzione della detta diagonale.

TEOREMA II.

33. Una forza qualunque finita potrà equivalere ad altre forze in numero infinite: e viceverſa indefinite forze di numero potranno equivalere ad una data.

DIMOSTRAZIONE. Data una qualunque linea eſprimente una forza, potraſſi ſempre riſolvere in altre due, le quali ſi oppongano ad angolo ottuſo, per modo che ciaſcuna di queſte ſia maggiore della prima data, eſprimente la forza compoſta (*N.* 30.); Ciaſcuna quindi di queſte due forze componenti potrà ancora conſiderarſi come compoſta, oſſia come diagonale di un parallelogrammo, e riſolverſi quindi come ſopra in altre due, ciaſcuna delle quali ſia pure maggiore di eſſa diagonale ſuppoſta, e così di ſeguito attenendoſi al principio della riſoluzione delle forze di ſopra ſtabilito, ſi potrà continuare lo ſteſſo diſcorſo fino all' infinito. Si potrà adunque ſcomporre una forza per modo, che equivalga ad altre di numero infinite, ciaſcuna delle quali ſia anche maggiore della data.

Viceverſa potranno ancora indefinite forze di numero equivalere ad una data; poichè preſe due qualſivoglia forze, e congiunte ad angolo ſi potranno queſte comporre in una terza eſpreſſa per la diagonale di un parallelogrammo. Unendo poi queſta ſteſſa forza compoſta ad angolo con un' altra qualunque delle date forze in numero indefinite, dalle tre ſe ne comporrà una ſola, che ci verrà eſpreſſa nella direzio-

ne e intenſità dal diametro del parallelogrammo formato ſulle rette eſprimenti le direzioni, ed intenſità di dette forze, e così ſeguendo lo ſteſſo principio della compoſizione già dimoſtrato, e unendo le forze in ſeguito ora ad angolo acuto ed ora ad ottuſo, per modo che la forza compoſta ſcemi continuamente, ſi potranno tutte le date forze ridurre ad una ſola data, che eſprimerà la intenſità di tutte nelle ſuppoſte direzioni. Poichè le indefinite forze di numero ſi potranno aſſumere tali che due qualunque di eſſe ſiano maggiori ſempre della terza, e ſi avrà quindi ſempre poſſibile la compoſizione; e formato colla diagonale ultima e colla forza ultima, e colla data un triangolo, e compito il parallelogrammo, avremo nella diagonale di eſſo l'intento. Si potranno adunque indefinite forze di numero comporre in una ſola che ſia data.

TEOREMA III.

34. Se due forze faranno tra loro un angolo infinitesimo o nullo, la forza compoſta (*Fig.* 17.) ſarà eguale alla ſomma delle due date.

DIMOSTRAZIONE. Conſiderandoſi l' angolo delle direzioni delle due forze come ſminuenteſi di continuo, diverrà alla fine infiniteſimo, oſſia minore di ogni aſſegnabile, e ſi potrà in tale caſo ſupporre che le forze non ſi elidano punto, ma coſpirino nella ſteſſa direzione, e ſi dovrà quindi prendere la ſomma delle forze (*Aſs.* v.) per la quantità del moto da conſiderarſi nel mobile. Così, e molto più eſſendo ſvanito ogni angolo per l'accoſtarſi delle rette *DA* e *BA*, ſi dovrà conſiderare la ſomma di eſſe impreſſa nel mobile

per avere e determinare l' intiera quantità di moto ad esso competente.

TEOREMA IV.

35. Se le due forze faranno tra loro un angolo che non differisca (*Fig.* 17.) che di una quantità infinitesima dai due retti, ovvero direttamente si contrapporrano le direzioni di esse forze, si dovrà solo considerare nella forza composta la differenza di queste due forze.

DIMOSTRAZIONE. Facendosi crescere successivamente, e rendendosi vieppiù ottuso l' angolo delle due forze, anderanno esse sempre più contrapponendosi, finchè si opporranno del tutto, nel caso che le direzioni di esse rette formino un angolo prossimamente eguale a' due retti, poichè in tale caso non si dovranno considerare nella stessa direzione, ma in opposta, e si dovrà quindi elidere dall' una parte, e dall' altra un' eguale quantità di moto (*Ass.* IV.), cosicchè sola rimarrà la differenza di esse forze per la composta che deve risultare da tal conflitto nel mobile. Così, e molto più opponendosi del tutto, con direzione contraria le forze *BA* e *DA*, che spingono il mobile *A* dall' una parte, colle forze *GA* e *CA* che lo movono dall' altra opposta, tutta la forza composta, si dovrà prendere dalla differenza delle somme delle forze che agiscono nell' una e nell' altra opposta direzione, dovendo eguali forze in tale caso distruggersi (*Ass. cit.*) prima che ne risulti il moto nel corpo. Rimarrà adunque la sola differenza di esse forze da considerarsi, a cui sarà (*Ass.* IV.) proporzionale il moto del corpo.

PROBLEMA I.

36. Venendo ſpinto un mobile nel punto *A* da più forze, e per altrettante direzioni comunque inclinate tra di loro (*Fig.* 18.) aſſegnare la direzione e la velocità che deve riſultare nel moto di eſſo.

RISOLUZIONE. Siano eſpreſſe le tre forze e le riſpettive direzioni di eſſe per le rette *AC*, *AD*, *AH*. Compiendoſi il parallelogrammo *ABDC* ſi compongano le due *AC* ed *AD* nel diametro *AB* dello ſteſſo, e ſi avrà in eſſo eſpreſſa la direzione, e l' intenſità della forza compoſta dalle prime due (*N.* 29.). Si componga in ſeguito queſta *AB* colla terza *AH* compiendo il parallelogrammo *BH*, e conducendo in eſſo la diagonale *AF* e ſi avrà l' intento; poichè la *AF* ſarà la retta che ci eſprimerà (*N. cit.*) la direzione, e la intenſità della forza compoſta da tutte e tre le forze eſpreſſe per le rette *AD*, *AC*, *AH*.

TEOREMA V.

37. Se tre forze *P*, *E*, *F* che agiſcono ſecondo le direzioni *PA*, *FA*, *EA* ſtaranno tra loro in equilibrio, prolungata la direzione *PA* in *G*, e formato il parallelogrammo *BC*, ſaranno le tre forze eſpreſſe dalle rette *BA*, *AC*, *AD*. (*Fig.* 19.).

DIMOSTRAZIONE. Eſſendo le tre forze in equilibrio tra loro, è neceſſario che due qualunque di eſſe per eſempio *F* ed *E* contraſtino con eguale ſforzo la terza *P*, imprimendo al mobile una velocità eguale a quella impreſſa del-

Digitized by Google

la forza *P*, e contraria per eluderne l'effetto; Ma alla direzione della forza *P* che ſpinge per *DA* niun altra direttamente ſe ne oppone, ſe non *AG*. Dunque l'azione d' amendue le forze *E* ed *F* deve riſpingere il mobile per la direzione *GA*; Ma tali forze equivalgono al diametro di un parallelogrammo fatto ſopra lati che indicano le loro date direzioni, e ſono anche proporzionali alle intenſità di eſſe forze (*N.* 29; 30). Dunque converrà che *AG* ſia il diametro del parallelogramo fatto ſopra i lati proporzionali alle forze *E* ed *F* ed inclinati a un dato angolo *BAC*, non potendo la ſteſſa linea *AG* ſervire per diametro di altri parallelogrammi fatti con un dato angolo *BAC*, e coi lati *BA* ed *AC*, ſe non che al parallelogrammo *BACG*. Facendoſi adunque equilibrio tra le forze *F* ed *E* colla terza *P* ſaranno le due prime eſpreſſe dei lati *AB* ed *AC*, e la terza forza *P* verrà eſpreſſa per *AG*, oſſia per l'eguale *AD*.

COROLLARIO I.

38. Quindi ſe un corpo ſarà ſoſpeſo a due funi non parallele *HP* ed *BF*, coſicchè prolungate vengono a concorrere in *G* (*Fig.* 20.) abbaſſata dal centro di gravità del corpo *A* una retta normale all'Orizzonte, dovrà queſta paſſare per il punto *G* di concorſo. Poichè eſſendo ſoſtenuto il centro di gravità del corpo *A*, dovranno le forze *E* ed *F* fare equilibrio col peſo del corpo (*Aſs.* IV.); Ma ciò non può ottenerſi quando *AG* non coſpiri colla diagonale *GD* del parallelogrammo formato ſopra le direzioni delle forze ſoſtenenti, dovendo queſte tre forze, per il Teorema, eſſere eſpreſſe dal diametro, e dai due lati contigui di un

parallelogrammo formato ſopra le direzioni di eſſe forze concorrenti a un dato angolo. Dunque ſe un corpo ec. ec.

COROLLARIO II.

39. Date generalmente tre forze, due delle quali ſiano maggiori della terza (*Fig.* 21.), ſi potranno ſempre diſporre per modo che ſi ottenga equilibrio tra di loro. Poichè venendo queſte eſpreſſe per i tre lati di un triangolo *BAG*, in cui ſi potranno ſempre comporre, compito il parallelogrammo *BACG*, e prolungata la diagonale *AG* fino in *D*, coſicchè ſia *AD* = *AG*, dovranno ſempre le due forze *BA* e *BG*, oſſia *BA* ed *AC* concorrenti all' angolo *BAC* equivalere ad *AG*, oſſia a *DA* (*N.* 27 ; 28). Contrapponendoſi adunque le due forze *BA* ed *AC* nell' angolo *BAC* colla forza *DA*, ſi bilancieranno oſſia avraſſi equilibrio tra loro.

TEOREMA I.

40. La forza che vale a tener teſa una ſune, per modo che formi queſta colla ſua direzione una retta parallela all' Orizzonte, non può eſſere meno che infinita.

DIMOSTRAZIONE. La forza di gravità che agiſce in tutte le parti della ſune ſi congiunge continuamente ad angolo colla forza orizzontale che ſi impiega per tener teſa la ſune; Ma unendoſi due forze finite ad angolo, ciaſcuna ottiene un effetto a ſe proporzionale, ſecluſe le eſtrinſeche cauſe che oſtino. (*N.* 28. ; 30.). Dunque la ſune animata dalle accennate due forze non potrà eſibire una retta paralle-

la all' Orizzonte, il che accaderebbe, ſecluſa la forza di gravità, ma ad ottenere tale effetto ſi richiederà una forza Orizzontale a cui non abbia alcuna proporzione qualunque data, oſſia richiederaſſi una forza infinita.

CAPO QUINTO.

DELLE MACCHINE, CHE FACILITANO IL MOTO.

TEOREMA I.

41. SE il vette *AB* mobile intorno ad un centro *C*, e tirato da due forze *P* ed *F* ſecondo le direzioni *BP* ed *AK*, che prolungate concorrano in qualche punto *G* otterrà equilibrio (*Fig.* 22.), tirate da *C* le normali *CD* e *CE*, ſarà la forza *P* alla forza *F*, in ragione reciproca delle normali *CD*, e *CE*.

DIMOSTRAZIONE. Dal centro o punto di ſoſtegno *C*, ſi tiri al punto di concorſo *G* la retta *CG*, la quale ci indicherà la direzione, e la intenſità della forza che fa il ſoſtegno *C* nel reggere la preſſione che ſoffre dalle forze *F* e *P*. Imperocchè tirate le rette *CN* e *CK* parallele alle direzioni *AF* e *DB*, il parallelogrammo *CNGK* ci dimoſtrerà le direzioni *AF* e *PB*, e la proporzione delle forze *P* ed *F* nei lati *GN* e *GK*, e però il diametro *CG* ne eſprimerà la direzione, e la intenſità della forza, che fa il ſoſtegno *C* per equilibrarſi con ambedue le dette forze (*N.* 36.). Eſſendo poi eguali i due triangoli *CGN*, e *CGK* le baſi di eſſi ſaranno reciprocamente come le altezze *CE*

CE e *CD*, e ſtando la forza *P* alla forza *F* come *GN*: *GK*, ſarà ancora *P* : *F* :: *CE* : *CD*, oſſia ſi troveranno le forze nel caſo d' equilibrio in ragione reciproca dei cateti abbaſſati dal punto di ſoſtegno ſulle direzioni delle forze.

COROLLARIO I.

42. Se le direzioni delle forze foſſero tra loro parallele, ſaranno le forze in ragione reciproca dei bracci del vette (*Fig.* 23.). Imperocchè eſſendo le direzioni delle forze parallele tra loro ſi potrà ancora ſupporre che convengano in un punto *G* infinitamente lontano da *C*, e ſe le direzioni *AF* e *BP* di dette forze formeranno angolo retto col vette, le normali abbaſſate ſulle direzioni delle forze ſi troveranno eſſere gli ſteſſi bracci del vette *AC* e *CB*, ai quali ſaranno perciò le forze *P* ed *F* reciprocamente proporzionali, per il Teorema. Che ſe le direzioni delle forze *AF* e *BP* ſaranno inclinate al vette ſi conducano le *CD* e *CE* normali alle direzioni delle forze prolungate ſecondo il uopo, ed in tale caſo per la ſomiglianza dei due Triangoli *AEC*, *CBD* ſarà *CE* : *CD* :: *AC* : *CB*; e perciò le forze le quali ſono proporzionali reciprocamente ai cateti *CE* e *CD* (*N.* 41.) avranno pure la ſteſſa ragione coi bracci *AC* e *CB* del vette.

COROLLARIO II.

43. Quindi pure ſe un peſo *D* ſarà ſoſtenuto dal vette orizzontale *AB* (*Fig.*24.), che ſi appoggia ſui punti *A* e *B* ſarà la porzione di peſo ſoſtenuta da *A* a quella ſoſtenut

da *B* nella ragione di *CB* : *CA*. Imperocchè i due punti *A* e *B* ſi poſſono conſiderare come due forze ſoſtenenti il vette, con direzioni perpendicolari ad eſſo. Ma queſte nel caſo d' equilibrio ſono in ragione reciproca dei bracci del vette (*N.* 42.). Dunque la parte del peſo ſoſtenuta dal punto *A* alla parte di peſo ſoſtenuta da *B* ſarà nella ragione di *CB* : *CA*.

PROBLEMA I.

44. Dato un vette *AB* inclinato all' Orizzonte, e carico del peſo *D* (*Fig.* 25.) trovare le direzioni delle forze, che facciano equilibrio col detto peſo minore della loro ſomma.

RISOLUZIONE. Sia la potenza *A* alla potenza *B* ed al peſo *D*, come la retta *AF* alle rette *BF* ed *AB*, e fatto con eſſe un triangolo *AFB*, e ad eſſo circonſcritto un cerchio ſi intenda queſto ſegato nel punto *F* dalla linea di direzione *CF*, che regge il peſo *D*. Prolungata quindi *CF* in *G*, e condotte le *BG* ed *AG* ci dimoſtreranno queſte le direzioni delle date forze, che ſoſteranno il vette nella direzione ſuppoſta. Imperciocchè compito il parallelogrammo *IH* intorno alla diagonale *GC* ſarà l' angolo *FGB*, oſſia *CGI* eguale all' angolo *BAF*, e l' angolo *ABF* = *AGF*, poichè poſti ſullo ſteſſo ſegmento, e terminati alla circonferenza; Ma l' angolo *AGF* è eguale ad *ICG* alterno. Dunque *GCI* ſarà = *ABF*, e però il triangolo *GIC* ſarà ſimile al triangolo *AFB*; laonde ſiccome dai lati *BF* ed *FA* ci ſi eſprimono le forze da applicarſi in *B* ed in *A* e dalla baſe *AB* la reſiſtenza *D* da ſoſtenerſi, così i lati ancora *CI*

ed *IG*, ossia *GI* e *GH* saranno proporzionali alle dette forze, ed il diametro *GC* al peso *D* da sostenersi. Ma *CG* ci esprime la vera direzione, con cui il peso *D* resiste. Dunque le *IG* e *GH* ci dimostrano altresì le vere direzioni delle forze, che debbono reggere il vette *AB* inclinato all' Orizzonte, e carico del peso *D*.

PROBLEMA II.

45. Come si possa distribuire equabilmente un gran peso a più persone (*Fig. 26.*) con varj vetti orizzontalmente disposti.

Risoluzione. Siano primieramente tre le persone, a cui si debba distribuire egualmente un dato peso *D* coll'uso di due vetti. Si divida a tal fine l'un vette *EG* per metà, e si appoggi a questo punto di divisione l' altro vette *FC*, il quale si intenda pure diviso in tre parti eguali, cosicchè sia *BF* un terzo di *FC*. Nel punto *B* si applichi il peso, ed ai punti *E*, *G*, *C* vengano applicate le tre persone supposte di statura eguale, e si avrà l' intento.

Se fossero quattro le persone che dovessero sostenere egualmente il dato peso, diviso l' un vette *EG* similmente per metà, e sospeso il grave al punto di mezzo *F*, sarà diviso egualmente il peso a tutte e quattro appoggiando le estremità del primo vette *EG* alla metà di due altri vetti *IA* ed *HK*, se agli estremi di questi si intendano applicate le forze delle persone che lo debbono reggere.

Similmente si dividerà a cinque persone con eguaglianza il peso *D*, se in vece di sospenderlo al punto *F* si sovrapporrà l' estremo di un' altro vette *FC* a questo punto

F, e si dividerà in seguito tal vette, per modo che *BF* sia la quinta parte di *FC*, e si sospenderà quindi il peso nel punto *B*, venendo applicata in *C* la persona che unitamente alle quattro deve sostenerlo.

La dimostrazione è piana, e facile e discende da ciò che si è detto nei Capitoli del centro di gravità, e del momento, poichè se al punto *F* o *B*, a cui si applica secondo i diversi casi il grave *D* si intenda posto un ipomoclio, ossia punto di sostegno, e applicato un peso eguale a *D* a tutti gli estremi dei vetti raffiguranti quivi linee Geometriche, si otterrà manifestamente equilibrio tra i dati corpi, poichè saranno le masse in ragione reciproca delle distanze, ossia delle velocità, ed avranno quindi eguali momenti intorno al punto *B* nel primo e nel terzo caso, e intorno al punto *F* nel secondo (*N.* 12.), e quindi equilibrio (*Ass.* 4.). Dunque posto ancora il peso *D* nel punto *F*, o nel punto *B*, secondocchè si è assegnato nei diversi casi graviterà egualmente sugli estremi dei vetti, ossia si distribuirà egualmente alle persone quivi applicate per sostenerlo.

COROLLARIO

46. Si potrà ancora dividere inegualmente un peso in una data ragione a più persone. Siano a cagion d' esempio quattro le persone situate agli estremi (*Fig.* 26.) *A*, *I*, *K*, *H* dei vetti *AI* ed *HK*, che reggono l' asta *EG*, alla metà di cui è sospeso il grave *D*, e si voglia caricare il punto *A* di doppio peso di quello che esercitasi sul punto *I*. Si divida a tal fine in tre eguali parti il vette *AI*, e si appli-

chi l' aſta *EG* ſopra *AI*, per modo che *AE* ſia una terza parte di tutta *AI*, e ſi otterrà l' effetto voluto. Poichè ſe l' aſta *EG* appoggiaſſe pure ſulla metà di *AI* e di *HK* nei punti *E* e *G*, il peſo ſarebbe diſtribuito egualmente a tutte e quattro le perſone (*N.* 45.). Ma ſuppoſto il punto *E* tale, che ſia *AE* : *EI* :: 1 : 2 dividendoſi i peſi in ragione inverſa delle diſtanze, ſarà il punto *A* carico di doppio peſo (*N.* 43.) per rapporto al punto *I*. Supponendo poi diviſo tutto il peſo *D* in 6 parti, $\frac{4}{6}$ ſi reggeranno ſul punto *A*, ed $\frac{2}{6}$ ſul punto *I*, reſtando l' altra metà del peſo diſtribuita egualmente ſui punti *H* e *K*, ciaſcun dei quali ne reggerà la $\frac{1}{6}$ parte.

Nello ſteſſo modo, e ſeguendo lo ſteſſo metodo ſi potrà diſtribuire un peſo con qualunque altra proporzione che ſi voglia a qualunque numero di perſone.

PROBLEMA III.

47. Dividere a due perſone egualmente o in qualunque data ragione ineguale (*Fig.* 25.) un peſo ſoſtenuto da un vette inclinato all' Orizzonte.

RISOLUZIONE. Sia il vette *AB* inclinato comunque all' Orizzonte e ſi intenda formato sù di eſſo, il triangolo *AFB* iſoſcele e rettangolo in *F*, e ſia il peſo *D* applicato per modo all' aſta *AB* che la linea di direzione di ſua gravità venga a cadere nel vertice di eſſo triangolo, oſſia nel punto *F*; indi ſi circonſcriva un cerchio al detto triangolo, e ſi faccia tutto l' apparecchio come al *N.* 44; dico che applicandoſi due perſone a reggere i due eſtremi del vette *AB*, il quale ritenga coſtante l' angolo di ſua inclinazio-

ne all' Orizzonte, sarà il peso *D* distribuito ad esse egualmente; poichè le due forze che bilanciano il peso *D* si potranno esprimere per le rette *AF* ed *FB*, ed il peso *D* per la linea *AB* (*N.* 37.), ovvero essendo simili i triangoli *AFB*, *GIC* si potranno ancora esprimere le intensità delle predette forze per le rette *HG* e *GI*, e per la diagonale *CG*, le quali rette esprimono ancora le direzioni vere delle forze (*N.*44.); ma *HG* ed *GI* sono eguali tra loro, come lati omologi ad *AF* ed *FB* del triangolo isoscele, e simile *AFB*. Dunque eguale forza si dovrà impiegare nel punto *B*, e nel punto *A* per reggere il peso *D* sospeso in *C* colla data inclinazione del vette *AB*, ossia sarà ripartito egualmente il peso *D* alle persone che reggeranno gli estremi del vette *AB*, ritenendo questo costante la data inclinazione all' Orizzonte.

Allo stesso modo ponendo tra i due cateti del triangolo un dato rapporto, si dividerà il peso in qualunque data ragione ineguale.

PROBLEMA VI.

48. Assegnare la natura, ed il vantaggio delle Leve.

Risoluzione. Presa un asta *AB* (*Fig.* 27., 28., 29.) di egual forma in tutta la sua lunghezza e di eguale densità, ed applicata ad un punto d' apoggio *C* ci rappresenterà questa una Leva in genere. Se i bracci *CA* e *CB* di essa saranno eguali (*Fig.* 27.), è chiaro che per equilibrare un peso *R* applicato all' estremo *A* sarà necessario di applicare in *B* un altro eguale peso, od una equivalente forza (*N.* 12.), e niun vantaggio avrà la forza *P* so-

pra il peſo *R* ad eſſa contrappoſto. Supponganſi ora i bracci diſuguali, e ſi ſoſpenda al minor braccio *AC* un peſo *R*, che chiameremo in ſeguito con il nome di *reſiſtenza*, e quindi ſi applichi alla eſtremità del braccio più lungo un peſo, o forza *P* che chiameremo pure col nome di *potenza*. Facile coſa ſarà quindi il conoſcere l'avvantaggio, e l'utile di tale ſtromento, che è di agevolare il modo di vincere ed alzare una data reſiſtenza. Imperocchè eſſendo i momenti, o forze totali come i prodotti delle maſſe moltiplicate per le riſpettive velocità (*N.* 9.), e le velocità come i raggi, oſſia come le diſtanze dal punto d'apoggio (*N.* 8.) è manifeſto che una data forza o peſo che ſi applichi al braccio più lungo del vette varrà a ſollevare una reſiſtenza molto maggiore dotata di minore velocità corriſpondente al braccio più corto di eſſo vette. Tutta la forza, ed il vantaggio adunque di una Leva non deriva, che dalla maggiore velocità che ſi può procurare alla potenza, che deve vincere una oppoſta reſiſtenza.

Oltre alla ſuddetta Leva due altre ſe ne diſtinguono, dette però l'una Leva di ſecondo genere, e l'altra di terzo. La Leva di ſecondo genere (*Fig.* 28.) ha il ſuo punto d'apoggio *C* in una eſtremità del vette, la reſiſtenza *R* ſituata in qualche punto di mezzo, e la potenza *P* applicata nell'altra eſtremità *B*. La forza, e l'utile di queſta Leva ci ſi manifeſta toſto che riflettiamo, che in eſſa la velocità che compete al braccio della potenza, che è l'aſta intiera *CB*, è ſempre maggiore della velocità della reſiſtenza, il braccio di cui ne è ſolo una parte, cioè *BA*, e perciò un minore peſo applicato in luogo della forza, o

potenza varrà a ſuperarne un dato maggiore applicato al luogo della reſiſtenza (*N.* 9:). La Leva di terzo genere (*Fig.* 29:) ha il punto d' appoggio *C* in una eſtremità del vette *AB*, la potenza *P* che opera in qualche punto di mezzo, e la reſiſtenza *R* applicata all' altro eſtremo del vette. Subito ſi ſcorge eſſere tale Leva imperfetta dovendo in eſſa eſſere maggiore la potenza della reſiſtenza per il ſolo equilibrio, ſtante la minore velocità che compete al braccio *CP* della potenza per rapporto a quella propria del braccio *CB* della reſiſtenza.

Per determinare poi nei caſi particolari il vantaggio che ſi avrà da una Leva di qualſiſia genere, ſupponendo l' aſta un filo rigido e ſenza peſo, non s'avrà che a fare la ſeguente proporzione. Il Braccio cui ſi deve applicare la potenza, al braccio in cui ſi deve contrapporre la data reſiſtenza, come il peſo di queſta, al peſo da applicarſi al luogo della potenza, che diverrà noto per mezzo della regola aurea. Ottenuto quindi cogli aſſegnati corpi l' equilibrio (*N.* 12.), quanto ſi troverà maggiore la data ſemplice reſiſtenza della potenza ſemplice, tanto ancora ſarà l' utile della Leva, oſſia l' avvantaggio maggiore che avrà di velocità la potenza ſopra la reſiſtenza.

Avvertaſi però che nelle eſperienze Fiſiche per evitare ogni errore ſenſibile, che potrebbe cagionare il peſo parziale dell' aſta converrà nella Leva di primo genere ragguagliare i bracci diſuguali del vette, ſovrapponendo qualche piccolo peſo al braccio più corto per equilibrare prima il vette per ſe ſteſſo. Nelle Leve poi di ſecondo, e di terzo genere converrà trafcurare nella proporzione il peſo neceſſario a ſollevare la ſemplice aſta, e potranno per tal modo

do i vetti, ossia le Leve, prescindendo sempre dall' attrito inevitabile nella materia, raffigurare linee Geometriche, e le sperienze si troveranno conformi alla Teoría.

SCOLIO.

49. La maggior parte de' strumenti usuali, e meccanici è riducibile a qualche genere di Leva; così i remi, i martelli, le cisoje, le tenaglie, i succhielli, le manovelle, il piè di capra ed altri simili ordigni o strumenti hanno tutti l' indole, e partecipano la forza di qualche genere di Leva, come è facile esaminandoli di vedere. L' uso poi delle Leve è grandissimo ancora nelle macchine più composte, poichè il vantaggio di ogni macchina quanto al moto si riduce d' ordinario nel procurare una massima velocità alla potenza, che deve agire contro una data resistenza. Non avendo poi certo limite l' aumento che si può dare di velocità ad una potenza, ben si vede quanto immensamente possa crescere il vantaggio che dalle Leve in generale si può trarre. Sù tale fundamento diceva già il gran Geometra di Siracusa, che egli avrebbe trasportato tutta la terra se avesse potuto fissare un piede fuori di essa.

Dic ubi consistam & cælum terramque movebo.

Imperocchè crescendo il momento di una potenza applicata ad una Leva, quanto più cresce la distanza di essa potenza dal punto di appoggio (*N.* 8 ; 9.), ne segue quindi che una piccolissima forza applicata all' estremità di un lunghissimo braccio di Leva, può fare equilibrio con una poderosa resistenza, e di gran lunga superiore. A tutta ragione disse adunque Archimede che egli avrebbe smossa, e

traſportata la terra intiera, ſe lui ſi deſſe un punto ſiſſo alquanto da eſſa ſeparato, poichè ponendo ſopra codeſto appoggio una Leva, il braccio della quale dalla parte della potenza ſuperaſſe quello a cui egli voleva ſoſpeſo il terreſtre globo, d' altrettanto e più di quello che il peſo di eſſo globo foſſe ſuperiore alla forza di un uomo, evidente coſa è che egli avrebbe mantenuta la ſua promeſſa con una dimoſtrazione indubitata. Nè giova il dire che la Leva di cui gli conveniva di ſervirſi, e il punto d' appoggio ricercato ſono idee chimeriche e immaginarie, poichè queſta e altre ſimili idee ſono ſcherzi e voli di un ſublime genio, che non ſa in certo modo ſtare riſtretto entro agli anguſti limiti, che la forza ed il potere della natura ci preſcrive.

PROBLEMA V.

50. Eſporre la natura, e la forza delle Caruccole, oſſia Taglie in genere.

Risoluzione. Si poſſono le Taglie in genere conſiderare come un adunamento di Leve continue, in cui la velocità della potenza ſuperando quella della reſiſtenza in ragione ancora della moltiplicità delle girelle, ſi arriva a muovere e ſollevare con una picciola potenza ajutata da una maggiore velocità, una grande reſiſtenza priva di eguale velocità, come dalla eſperienza ci ſi rende manifeſto. Le ſuddette Leve continue ſi poſſono di leggieri ravviſare nei diametri e raggi delle girelle, che ſi vanno gli uni agli altri ſuccedendo, e per mezzo dei quali viene ad agire la forza ſopra un dato peſo o reſiſtenza.

Dai caſi particolari poi, che noi quì ſotto annalizze-

remo, più chiara apparirà ancora l' indole accennata delle ſuddette taglie, e ſi avranno ancora ſtabilite leggi generali per determinare il vantaggio, che da eſſe ſi può trarre.

TEOREMA II.

51. Per una Taglia ſemplice e ferma niun vantaggio ne acquiſta la potenza (*Fig.* 30.).

DIMOSTRAZIONE. La ragione di ciò è manifeſta, poichè l' aſſe *BA* della girella, figura una Leva continua di braccia eguali, a cui venendo nei due eſtremi applicati gli eguali peſi *P* ed *R* ſi hanno i momenti conſeguenti eguali (*N.* 12.), e quindi ottienſi equilibrio tra loro (*Aſs.* 4.). Il beneficio adunque che ſi può trarre dal ſuddetto iſtrumento è nullo, poichè non avendo la potenza maggiore velocità della reſiſtenza, la maſſa o il peſo di queſta dovrà per l' equilibrio ragguagliarſi alla forza. Dunque ec.

Che ſe poi di queſta Taglia in molte occaſioni l' arte ſi ſerve per tirare peſi in alto, ciò ſi fa, come avverte il Gallilei nella ſua Meccanica, perchè il modo dell' eſercitare e dell' applicare la forza ci torna più comodo, mentre dovendo tirare all' ingiù, la ſteſſa gravità delle noſtre braccia e degli altri membri ci ajuta, dove che biſognando tirare all' insù con una ſemplice corda lo ſteſſo peſo, col ſolo vigore dei nervi e dei muſcoli, e come ſi ſuol dire a forza di braccia, oltre il peſo eſterno dobbiamo ſoſtenere il peſo ancora delle noſtre braccia, nel che fare ſi ricerca fatica maggiore, e per tal ragione l' uſo di queſta Taglia è reſo comune.

TEOREMA III.

52. Per mezzo di una Taglia mobile la potenza potrà equilibrare un peſo, che eguagli il doppio di ſua forza (*Fig.* 31 ; 32.).

DIMOSTRAZIONE. Sia la Caruccola *ACB* volubile intorno al ſuo Aſſe *C*, e collocata nella ſua caſſa, da cui pende il grave *R*, e paſſi intorno ad eſſa una funicella, l' un capo della quale ſia raccomandato a qualche ſoſtegno ſtabile *S*, e l'altro eſca parallelo alla direzione *AS*, e ſi porti al luogo in cui deve agire la potenza *P*. Ciò poſto ſi oſſervi che l' intiera reſiſtenza *R*, in cui ſi deve pure comprendere il peſo della Taglia mobile, verrà ſoſtenuta egualmente dalle due funicelle *BP*, ed *AS* (*N.* 43.), e però il ſoſtegno *S* ne reggerà la metà. Con una forza adunque equivalente ſolo alla metà della data reſiſtenza ſi otterrà l' equilibrio.

ALTRA DIMOSTRAZIONE. Conſiderando minutamente la natura di queſto ſtromento ſi vede farſi nel diametro *AB* e nei ſucceſſivi una leva coſtante di ſecondo genere, il cui punto d'appoggio è nella eſtremità *A* contro alla fune *AS*, e la reſiſtenza nel punto di mezzo *C*, reſtando la potenza applicata all'altra eſtremità *B* dello ſteſſo diametro. Dovrà adunque eſſere per l' equilibrio, la potenza alla reſiſtenza, come il raggio al diametro, (*N.* 12.); oſſia doppia dovrà eſſere la reſiſtenza *R* della potenza *P*; il che ec.

Si potrebbe ancora con altro metodo dedurre una chiara e facile dimoſtrazione dello ſtabilito Teorema. Si oſſervi che mentre la reſiſtenza *R* ſi alza per uno ſpazio quan-

tunque picciolo, ſi deve ſvolgere d' altrettanto d' intorno alla girella mobile, ciaſcuno dei due fili *BP* ed *AS*, e gli ſvolgimenti di eſſi ſi devono portare ſucceſſivamente al punto *P*, dove agiſce la potenza. Mentre adunque la reſiſtenza ſi alzerà per lo ſpazio come 1, una forza od una potenza che ſi applichi in *P* percorrerà nello ſteſſo tempo un doppio ſpazio. Ma poſti eguali i tempi, le velocità ſono come gli ſpazj percorſi (*N.* 2.). Dunque la velocità competente alla potenza ſarà doppia di quella che competerà alla reſiſtenza, e quindi applicando una forza in *P* equivalente alla metà ſoltanto di *R* ſi avranno i momenti eguali (*N.* 12.), e quindi equilibrio (*Aſs.* 4.), e con ogni picciolo vantaggio di forza, la potenza varrà ancora a vincere la data reſiſtenza.

La ſteſſa dimoſtrazione ſi potrà ancora applicare alla *Fig.* 32, in cui la funicella a cui ſi dee applicare la potenza ſi accavalca ad un' altra Taglia ferma, per avere il noto vantaggio ſuperiormente deſcritto (*N.* 51.) nella applicazione della forza.

TEOREMA IV.

53. Con due Taglie ferme ed una mobile, la potenza varrà ad equilibrare un peſo triplo di ſe ſteſſa (*Fig.* 33.).

DIMOSTRAZIONE. Affine che la reſiſtenza *R* ſi alzi per un dato ſpazio, è neceſſario che le tre funicelle, che la reggono *ba*, *dc*, *fe*, che per ora ſi ſuppongono tra loro parallele, ſi ſvolgano tutte e tre per altrettanto ſpazio, e che i ſvolgimenti di eſſe ſi portino al luogo dove agiſce la potenza *P*; Sarà quindi lo ſpazio fatto dalla potenza *P*, allo ſpazio ſcorſo nello ſteſſo tempo dalla reſiſtenza *R* :: 3 : 1.

La velocità adunque della potenza ſarà tripla della velocità della reſiſtenza (*N.* 2.), e un terzo perciò di peſo applicato in *P* avrà un eguale momento a quello della reſiſtenza *R* (*N.* 12.), ed otteraſſi per tal modo l' equilibrio.

TEOREMA V.

54. Se due Taglie ſaranno mobili e due ferme, la reſiſtenza dovrà eſſere quadrupla della potenza, affine di ſtabilire l' equilibrio tra loro (*Fig.* 34.).

DIMOSTRAZIONE. Mentre il peſo *R* tirato dalla potenza ſi alza per un dato ſpazio come 1, le quattro funicelle *dg*, *ci*, *ab*, *fe* avvolte alle due Taglie mobili *C* e *D*, ſuppoſte quivi pure le funi parallele, dovranno ſvolgerſi ciaſcuna per uno ſpazio eguale alla data unità, e la potenza *P* che riceve tutti e quattro gli ſvolgimenti di eſſe funi dovrà fare nello ſteſſo tempo uno ſpazio quadruplo di quello che fa la reſiſtenza, e la velocità di eſſa potenza ſarà perciò quadrupla di quella della reſiſtenza (*N.* 2.). Dovendoſi poi i peſi contrapporre in ragione reciproca delle velocità per avere momenti eguali (*N.* 12.), ed in ſeguito l' equilibrio, dovrà come è chiaro eſſere quadrupla la maſſa della reſiſtenza al paragone di quella da applicarſi in luogo della potenza.

ALTRA DIMOSTRAZIONE. La reſiſtenza *R* viene ſoſtenuta egualmente dai 4 fili *dg*, *ic*, *ab*, *fe* (*N.* 43.), ſuppoſte le funi parallele. Ciaſcun filo adunque ne reggerà la quarta parte, e ſe al punto ove agiſce la potenza *P* ſi applicherà un peſo, che eguagli la quarta parte di *R*, la forza che fa il filo *FH*, che ſi trasfonde alla potenza *P*, ſarà bilanciata, e ſi otterrà quindi (*Aſs.* 4.) equilibrio.

Lo ſteſſo dimoſtreraſſi ancora nel caſo della *Fig.* 35, in cui le caruccole mobili e le ſtabili ſono binate, e ſi ravvolgono intorno allo ſteſſo Aſſe, e ciò perchè più tardi giungano a toccarſi, e ſi ottenga un più lungo effetto dalla macchina.

COROLLARIO I.

55. Potendoſi le ſuperiori dimoſtrazioni indifferentemente applicare a tutti i caſi di conſimili combinazioni di Taglie, ſi potrà quindi ſtabilire il generale principio che dovrà ſtare per il ſolo equilibrio, la forza al peſo, come l' unità al numero dei fili, che ſoſtengono la data reſiſtenza, e che ſi devono ſvolgere nello ſteſſo tempo per uno ſpazio eguale a quello, per cui ſi alza nel dato tempo la reſiſtenza. (Tra i fili ſoſtenenti il peſo non ſi deve computare quello cui è applicata la potenza P, ſe non nel caſo che la ſteſſa potenza agiſca all' insù, nel qual caſo, parte della reſiſtenza ſi riparte pure alla fune cui viene applicata la forza). Denominandoſi quindi generalmente la potenza p, ed il peſo, oſſia la reſiſtenza r, ed il numero dei fili ſoſtenenti il peſo e ſvolgentiſi nello ſteſſo tempo d' un egual ſpazio a quello per cui ſale la reſiſtenza $= n$ dovrà eſſere per il ſolo equilibrio $p : r :: 1 : n$, oſſia $p = \frac{r}{n}$, e ſarà queſta la generale eſpreſſione della potenza da applicarſi in tutte le combinazioni di Taglie conſimili alle ſuperiori, per ottenere equilibrio tra la forza e il peſo.

COROLLARIO II.

56. Quindi ſe ſaranno due Taglie mobili, ed una ſola fiſſa come accaderà nella (*Fig.* 33.), ſe s'intenderà eſſa roveſciata, ed applicata la reſiſtenza, dove era il punto di ſoſtegno, dovendo la potenza agire dal baſſo all' alto, quattro ſaranno le funi ſoſtenenti il peſo, aggiungendoſi alle tre mentovate di ſopra la quarta *EP*. In tale caſo adunque ſi avrà l' equilibrio ſe ſtarà la forza al peſo, come 1 : 4. (*N.* 55). Così pure nel caſo delle due Taglie mobili e due fiſſe (*Fig.*34.), ſe ſi intenderà applicata per modo la reſiſtenza, roveſciate le Figure, che la forza venga ad agire dal baſſo all' alto, 5 ſaranno le funi ſoſtenenti la data reſiſtenza, ed in tale caſo s' avrà l' equilibrio facendo ſtare la forza al peſo, come 1 : 5 (*N.* 55); Ma non s' avrà in tale circoſtanza il noto vantaggio della applicazione della forza accennato di ſopra (*N.* 51).

TEOREMA VI.

57. Con una compoſizione di Taglie diſſimile però dalle ſuperiori ſi potrà dare una velocità alla potenza, tanto moltiplicata della dupla, quanto ſarà il numero delle Taglie mobili (*Fig.*36.).

DIMOSTRAZIONE. Siano le tre Taglie *A*, *B*, C mobili, e ſia la quarta *I* fiſſa ad un ſoſtegno ſtabile, *S* e s' intendano pure le funi *HZ*, *FX*, *YD* fiſſe in una eſtremità ai punti ſtabili *Z*, *X*, *Y*, e ſia la reſiſtenza *R* ſoſpeſa all' ultima Taglia C nella metà del ſuo aſſe *HV*. Chiara coſa

cosa è a vedersi che la potenza, la quale opera in *V* avrà doppia velocità della resistenza, la quale agisce in *C* (*N.*8.), essendo i rispettivi loro bracci, come il diametro al raggio, considerato il punto d' appoggio in *H*. Lo stesso principio potendosi addattare alla seconda Taglia *B*, si troverà in *G* quadrupla la velocità della potenza per rapporto a quella della resistenza, e raddoppiandosi ancora per la stessa ragione in *E*, diverrà la velocità della potenza, che agisce in *P* ottupla della velocità della resistenza *R*, e così di seguito, ossia acquisterà la potenza una velocità tanto moltiplicata della dupla, quanto sarà il numero delle Taglie mobili.

COROLLARIO.

58. Quindi se il numero delle Taglie mobili successivamente sarà 1, 2, 3, 4, 5 ec., i pesi da applicarsi in luogo della potenza per ottenere equilibrio con una data resistenza, saranno pure per ordine $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$; poichè si avranno per tal modo le masse contrapposte in ragione reciproca delle velocità, e perciò i momenti eguali (*N.* 12.), e quindi ne nascerà il voluto equilibrio.

Questo stesso principio si può porre sott'occhio colla più sensibile e palese evidenza (*Fig.*36.), usando del principio della distribuzione del peso alle funi supposte parallele, poichè primieramente il peso sarà distribuito egualmente alle funi *HZ* ed *VB* (*N.* 40.). Dunque il punto *B* non ne reggerà che la metà; questa metà di peso, essendo due le Taglie mobili, sarà retta egualmente delle funi *XF* e *GA*. Dun-

que il punto *A* non ſoſterrà che una quarta parte del peſo. Se tre ſaranno le Taglie mobili la porzione di peſo ſoſtenuta dalla fune *GA* ſi diſtribuirà egualmente alle due funi *DI* ed *EM*. Dunque la fune *EM* non ne reggerà che una ottava parte, e così di ſeguito. Contrapponendoſi adunque in *P* una forza, che eguagli ſucceſſivamente $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$ della reſiſtenza, ſi otterrà (*N.* 12.) il ricercato equilibrio.

TEOREMA VII.

59. Se le funi avvolte ad una Taglia mobile non ſaranno tra loro parallele (*Fig.* 37.), ma uſciranno divergenti, tirati ai punti eſtremi di contatto i raggi *CB* e *CA*, e la ſotteſa *BA*, dovrà eſſere per l' equilibrio la forza al peſo come il raggio alla ſuddetta ſotteſa.

DIMOSTRAZIONE. Si abbaſſi dal punto *A* la *AE* normale alla direzione *BD*, e dal punto *C* centro della Taglia la *CO* perpendicolare ſopra la ſotteſa *BA*. Conſiderato in *A* il punto d' appoggio, ſarà *OA* la diſtanza da queſto della reſiſtenza *R*, ed *EA* la diſtanza oſſia il raggio della forza, e però la velocità del peſo *R* alla velocità della potenza ſarà nella ragione di *OA* : *AE* (*N.* 8.). Eſſendo poi ſimili i due Triangoli *CAO* ed *EBA* per eſſere l' angolo *AOC* = *BEA* ambedue retti, e l'angolo *CAO* = *CBA* = *BAE* alterno, ſarà ancora la velocità della potenza a quella del peſo :: *CA* : *BA*. Si avrà dunque l'equilibrio, contrappoſti peſi in ragion reciproca delle velocità (*N.* 10, e *Aſs.* 4), oſſia ſe la forza al peſo ſarà nella ragione di *CA* : *BA*, cioè come il raggio alla ſotteſa determinata dagli eſtremi punti di contatto della fune colla Taglia.

COROLLARIO I.

60. Lo ſteſſo effetto poi non ſi ha, ſe le Taglie ſono ferme, poichè il centro del moto ſi è lo ſteſſo centro di ciaſcuna Taglia, e tirate da tal punto le normali *GL*, *GN* alle direzioni delle funi, ſi trovan eſſe uguali, e ricorre il caſo delle funi parallele.

PROBLEMA VI.

61. Data una potenza atta ad equilibrarſi con una determinata reſiſtenza nel caſo delle funi parallele, trovare il rapporto, e quindi la differenza di eſſa, colla ſomma delle ſucceſſive potenze da applicarſi per aver l'equilibrio, nel caſo che le funi avvolte alla Taglia ſiano obblique, e paſſino dalla menoma obbliquità fino alla maſſima, che poſſono acquiſtare col ſollevarſi della reſiſtenza (*Fig.* 37.).

Risoluzione. Data una Caruccola mobile, e ſuppoſte le funi parallele, la forza deve eſſere al peſo, per avere l'equilibrio, come il raggio al diametro, oſſia come 1 : 2 (*N.* 12.). Nel caſo poi che le funi ſiano oblique, la proporzione tra la potenza e la reſiſtenza, perchè ſuſſiſta l' equilibrio, deve eſſere quella ſteſſa, che paſſa tra il raggio e la ſotteſa determinata dai due punti ultimi di contatto delle due funi colla ſteſſa Taglia (*N.* 59.). Reſtando quindi coſtante la prima proporzione, ſi potrà variare di continuo la ſeconda, poichè ſupponendo alzata alquanto la reſiſtenza, creſcerà ſucceſſivamente la obbliquità delle funi, e ſi dovrà per l' equilibrio, accreſcere di continuo la potenza. Se ſi conſiderino poi le

funi poſte alla menoma obbliquità ſul principio, per modo che riſalendo la reſiſtenza, vadano acquiſtando la maſſima obbliquità, chiara coſa è che dovraſſi ſucceſſivamente accreſcere la potenza, che deve bilanciare la data reſiſtenza, ſiccome creſce di continuo la ragione del raggio ſopra la ſotteſa. Si ſupponga quindi che il raggio ſcorra parallelo a ſe ed equabilmente, per tutto il tempo in cui fluendo la ſotteſa dell' arco, dall' eſſere di maſſima giugne a ſvanire, e ſi troverà che mentre il raggio coſtante ſcorrendo di conſerva colla ſotteſa variabile ci avrà dato un quadrato, la ſotteſa paſſando dall'eſſere di maſſima all'eſſere di minima ci avrà dato un ſemicerchio. Nella ſteſſa proporzione adunque dovranno eſſere pure nella totalità la potenza coſtante colla ſomma di tutte le ſucceſſive potenze applicate in tutti i punti, dalla minima ſino alla maſſima obbliquità delle funi, per avere l' intento in tutti e due i caſi. Il rapporto adunque che paſſerà tra il quadrato del raggio, e il ſemicerchio fatto collo ſteſſo raggio, ſarà lo ſteſſo che paſſerà tra la forza coſtante applicata a funi parallele, e la ſomma delle ſucceſſive potenze applicate di ſeguito ai caſi della variata obbliquità delle funi. Di quì ſi otterrà facilmente la differenza tra la forza totale da applicarſi nel caſo delle funi parallele per rapporto al caſo delle obblique. Poichè ſupponendoſi il raggio $= 1$, e quindi il ſuo quadrato $= 1$, l'area ſemicircolare di eſſo raggio, data la proporzione del diametro alla circonferenza: : $1 : 3$, ſi troverà $= 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Il rapporto adunque della forza al peſo ſarà nel caſo dell' obbliquità : : $1 : \frac{3}{4}$, quando nel caſo delle funi parallele avvolte ad una Taglia mobile, tal rapporto ſi trova eſſere come $1 : 2$. La differenza adunque, che paſſa tra 2 e $\frac{3}{4}$, cioè $\frac{1}{4}$, ſarà la ricercata, donde

ſi vede quanto maggior diſpendio di forza ſi ricerchi, eſſendo obblique le funi, che nel caſo del paralleliſmo di eſſe.

SCOLIO I.

62. Potrebbe ſembrare nel caſo delle funi non parallele (*Fig.* 37.) che eſſendo diſtribuito egualmente il peſo alle due funi, che ſoſtengono la data reſiſtenza, una metà ſolo di queſta applicata in *P* doveſſe equilibrare l'intiero peſo applicato in *R*, come ſuccede nel caſo delle funi parallele. Ma facilmente ſi può conciliare tal'idea metafiſica colla dimoſtrazione geometrica, poichè ſebbene ſia veriſſimo quanto ſi è oſſervato, ſuſſiſte però ancora che ſi richiede una forza maggiore per l'equilibrio colla reſiſtenza, eſſendo le funi obblique, poichè una parte di forza non agiſce in tale caſo, e ſi diſperde, come dalla riſoluzione della forza *BL* nelle due *VL* e *BV* facilmente appariſce.

PROBLEMA III.

63. Aſſegnare la natura e la forza dell'Aſſe nella ruota, e dell'Argano (*Fig.* 38.).

RISOLUZIONE. L'Aſſe nella ruota ci ſi rappreſenta nel cilindro *BA* anneſſo ad una ruota *ECD* di maggior diametro, cui applicandoſi la potenza *P* ſi muove un dato peſo *R*, retto dalla fune, che ſi ravvolge intorno al cilindro. E' manifeſto poi che nello ſteſſo tempo in cui il peſo è alzato per tanto ſpazio, quanto importa la lunghezza della fune, la quale circondi una volta il cilindro, è neceſſario che la ruota anneſſa compia un intiero giro, e che ſi

porti alla potenza applicata in *P* altrettanto ſvolgimento di ſune. Eſſendo poi le velocità, poſti eguali i tempi, come gli ſpazj (*N.* 1.) ſarà la velocità della potenza a quella del peſo da alzarſi, come la circonferenza della ruota a quella del cilindro, oſſia come il raggio della ruota al raggio del cilindro. Se ſi avrà adunque la proporzione della forza al peſo *R*, come il raggio del cilindro al raggio della ruota anneſſa, che è la reciproca della velocità, ſi avranno i riſpettivi momenti eguali (*N.* 12.), ed otterraſſi quindi equilibrio tra la potenza *P*, e la reſiſtenza *R*, e con ogni minimo vantaggio di forza, che acquiſti poi la potenza, alzeraſſi da eſſa il peſo *R*. Invertendo adunque la ſuperiore proporzione, dati i primi tre termini, ſi troverà di leggieri la potenza che deve applicarſi a tale ſtrumento, per equilibrare, e vincere ancora una data reſiſtenza, e da tale confronto ſi avrà noto il vantaggio, e la forza di tale Macchina. Collo ſteſſo metodo ſi troverà la potenza che faccia equilibrio col peſo *R*, ſe in vece di applicare la forza alla ruota, veniſſe applicata alle caviglie *IH*, e *GF*, od al manubrio *AM*.

Non diſſimile dall' Aſſe nella ruota (*Fig.* 39.), ſe non in quanto alla poſizione ſi è l' Argano, che è un cilindro fiſſo e perpendicolare all'Orizzonte, il quale ſi muove sù di un perno per mezzo di alcune ſtanghe intromeſſe, e vince una data reſiſtenza col mezzo di una ſune, che intorno gli ſi ravvolge, e che s' impiega d' ordinario per reggere un peſo nel modo indicato dalla figura. Il vantaggio di queſta ſempliciſſima Macchina, deriva dalla maggior velocità, che ha la forza applicata alle ſtanghe *BE* ed *AC*, di quella competa al cilindro *DN*, cui è applicata la reſiſtenza, poichè

mentre la fune che tira la reſiſtenza ſi ravvolge una volta intorno al cilindro, ſi compie pure un intiero cerchio dalle ſtanghe. Se ſarà adunque la forza al peſo *R*, come il raggio del cilindro alla lunghezza *DA* o *DE* delle ſtanghe, che è la reciproca delle velocità ſi avrà equilibrio (*N.*12.), e dal paragone della data reſiſtenza colla potenza da applicarſi ſi dedurrà il vantaggio della macchina, poichè aggiunta ogni minima forza alla potenza, o accreſciuta di pochiſſimo la lunghezza delle ſtanghe ſi muoverà il peſo, oſſia la data reſiſtenza.

PROBLEMA VIII.

64. Spiegare la forza, e gli uſi delle Ruote dentate (*Fig.* 40.).

Risoluzione. Appariſce di leggieri eſſere le ruote dentate altrettante leve adunate, che ſi vanno ſuccedendo le une alle altre mentre un dente opera, e queſto trapaſſando l' altro ſuccede. Il loro riſpettivo punto d' appoggio ſi rinviene nel centro della ruota cui appartengono. La forza viene applicata all' eſtremità dell' aſſe o diametro, che riceve il moto dalla cauſa agente, reſtando la reſiſtenza *R* anneſſa al cilindro *DE* dell' ultima ruota. Facile coſa è a vederſi che ſe la prima ruota, che riceve il moto ſarà di maggior diametro della ruota dentata anneſſa *C*, ſarà la velocità della prima movente alla velocità della ſeconda, come il raggio *CF* al raggio *CE*. Comunicando poi la ruota dentata *C* il moto alla ſeguente *B*, ſarà la velocità ancora della ruota *C* a quella della ſuſſeguente *B* in ragione ancora di *CE* : *GO* (*N.* 8.), e così di ſeguito

nelle altre la velocità seguirà la ragione composta di *CE* : *GO* di *GI* : *TL* e di *TL* : *EL*. Si avrà dunque l' equilibrio, quando la forza al peso sarà in ragione del picciol raggio del cilindro intorno a cui s' avvolge la fune sostenente il peso, alla composta di tutti i raggi delle ruote a cui comunicasi successivamente il moto (*N.* 12.).

Gli usi poi di tali ruote sono di portare ad una certa distanza il moto, di cangiare la direzione di una forza di perpendicolare in Orizzontale, e viceversa, siccome pure di accelerare, o di ritardare in una data ragione il movimento secondo il uopo, come in molte usuali macchine si può di leggieri vedere.

PROBLEMA IX.

65. Spiegare la forza, e gli usi delle Viti.

RISOLUZIONE. Nel piano stabile *DE* (*Fig.* 41.) si intendano scavate alcune spire, che si chiamano madrevite e dentro di essa sia inserita la vite maschia *BG*, o come altri dicono il verme della Vite, al cui estremo sia attaccato un dato peso *R*, e supponga si applicata all'estremo del manico *BA* la potenza, ossia la forza che deve agire. Aggirandosi questo manubrio, e compiendo un intiero giro si vedrà sorgere dal piano una sola voluta della vite, ed il peso sarà salito solamente per tanto spazio, quanto importa l' intervallo d'una spira all'altra. Dunque sarà tanto più veloce il moto della potenza di quello del peso, quanto maggiore sarà la periferia del piano circolare descritto dal raggio *BA*, della distanza che vi ha tra una spira, e l' altra di essa Vite (*N.* 2.). Ponendo quindi la stessa proporzione, ma reciproca

reciproca tra la potenza ed il peſo *R* contrappoſto ſi otterrà equilibrio (*N.*12.), e con ogni picciolo vantaggio di forza o di velocità ſi potrà poi ſollevare la reſiſtenza *R*. Di quì appariſce di leggieri quanta ſia l' efficacia di tale iſtrumento per avvantaggiare il momento oſſia la totale azione della potenza.

Gli uſi poi della Vite non ſono punto di minore conſeguenza, poichè non ſolo ſi addatta a ſollevare grandiſſimi peſi con facilità, (*Fig.* 42.) ma è atta altresì a fermare, comprimere e ſtringere con grandiſſima forza, il che s' ottiene interponendoſi un corpo tra i piani *XZ* e *BE*, l' un dei quali, cioè *XZ* che contiene la madrevite ſia mobile, e l'altro fermo ed in altre ſomiglianti uſuali guiſe. La Vite in generale ha pure il vantaggio che occupando pochiſſimo ſpazio, ottiene quell' effetto che non otterrebbero altri ſtrumenti ſe non foſſero ridotti in grandi macchine.

Oltre la ſuddetta Vite di cui abbiamo eſpoſto in generale la forza e gli uſi, un' altra ancora ve n' ha ingegnoſiſſima (*Fig.* 43.), che già da due mille e più anni porta il nome di Archimede ſuo Autore, e diceſi ancora *perpetua* dal ſuo continuo modo di agire, la quale ſebbene non differiſca nella forma dalla ſovraccennata, varia però per la compoſizione che ſi ſuol fare di eſſa coll' aſſe nella ruota, e ſi merita bene una particolare ſpiegazione. Queſta Vite pertanto così combinata che incontra colle ſue ſpire i denti di una ruota, dall' aſſe di cui viene ſoſtenuto il peſo *R*, fa l'uffizio anch' eſſa di una ruota dentata, ma ſopra di eſſa ha il vantaggio di una grandiſſima velocità, poichè mentre ſi muove per lo ſpazio di un dente la ruota *E* tutta ſi ſvolge una ſpira della Vite attorta al cilindro *BDC*, che

s' aggira per la forza applicata al manubrio BP. Se ſi denominerà quindi la circonferenza del cilindro $BDC = c$, e la parte di cerchio occupata da un dente nella ruota $E = \frac{m}{n}$, e la potenza $= p$, e la reſiſtenza $= r$ avendoſi $p : r :: \frac{m}{n} : c$, oſſia $p = \frac{rm}{cn}$, cioè le velocità reciproche agli ſpazj ſi avrà l'equilibrio, e con ogni piccioliſſima forza, che ſi aggiunga alla potenza alzeraſſi la data reſiſtenza. Si vede quindi come con poca forza applicata per più tempo ſi poſſa coll' ajuto di queſta vite muovere una peſante ruota ed atta a faticoſo lavoro. Lento però è l'effetto che con tale macchina ſi ottiene, dovendo paſſare molto tempo avanti che la ruota dentata compia per tal modo un' intiero giro.

La forza in generale delle Viti (*Fig.* 42.) ſi riferiſce ancora da alcuni alla natura ed indole dei piani inclinati, di cui noi tratteremo in appreſſo, come ci ſi manifeſta dallo ſvolgimento di alcune ſpire, che ci rappreſentano il triangoletto *cgd*. Quivi baſti di avere ricavato dai generali principj del moto la riſpettiva forza di tale ſtrumento, e di averne accennato i principali uſi.

PROBLEMA X.

66. Eſporre la coſtruzione, e l' indole della Coclea di Archimede per alzar l' acqua.

Risoluzione. Intorno al cilindro *IMSO* s' intenda avvolta la faſcia *ILHPQRSO* (*Fig.* 44.), la quale dinoti un canale, per cui poſſa ſcorrere l' acqua. Se metteremo l' eſtremità *M* nell' acqua facendo ſtare il cilindro pendente,

per modo che il punto *L* ſia più baſſo del punto *I*, e volgeremo in ſeguito il cilindro intorno i due perni *T* ed *V*, l'acqua anderà inſinuandoſi ſucceſſivamente nel canale, finchè finalmente ſi vedrà ſgorgare dalla bocca *O*. Egli è vero però che l'acqua nel condurſi dal punto *I* al punto *O* è venuta ſempre diſcendendo nel canale avvolto al cilindro, ſebbene il punto *O* ſia più alto del punto *I*. Per ciò meglio vedere ſi deſcriva il Triangolo *ACB*, il quale ſia quello onde ſi generi la vite *OI*, di modo che il canale oſſia la vite attorta ſia figurata dalla linea *AC*, la cui ſalita ed elevazione è determinata per l'angolo *CAB*, coſicchè ſe il detto angolo ſarà la terza o la quarta parte di un'angolo retto, l'elevazione pure del canale *AC* ſarà ſecondo $\frac{1}{3}$ od $\frac{1}{4}$ di un angolo retto. Ella è coſa poi per ſe manifeſta che la ſalita di eſſo canale *AC* verrà tolta via, abbaſſando il punto *C* fino in *B*, poichè allora il canale *AC* non avrà più alcuna elevazione, e abbaſſando il punto *C* un pò al ſotto di *B*, ſarà il canale *AC* declive per rapporto alla retta *AB*.

Ciò preſuppoſto ſi intenda avvolto il Triangolo generatore *ACB* intorno al cilindro *TV* per modo che ne naſca la vite *ILHPQRSO*. Se ſi coſtituirà quindi tal cilindro diritto, oſſia normale all'Orizzonte colle eſtremità *I* ed *M* poſte a fior d'acqua, non per queſto tirerà all'insù l'acqua, reſtando il canale *IL* per cui deve introdurſi, in tale ſuppoſizione acclive oſſia rilevato. Ma ſebbene il cilindro ſia diritto e formi angoli retti coll'Orizzonte, non è per queſto che la ſalita per la vite attorta intorno alla colonna *TV* ſia di maggior elevazione di $\frac{1}{3}$ o di $\frac{1}{4}$ di un retto, ſecondo l'inclinazione che ſi vuol ſupporre della retta *AC*

verſo *AB*. Se adunque ſi farà piegare la colonna verſo l' Orizzonte per tutto l' angolo *CAB*, ed un poco più vi farà tranſito e moto dell' acqua per il canale *IL*. Adunque l' acqua dal punto *I* al punto *L* ſi muoverà diſcendendo, ed aggirandoſi intorno il cilindro, ſiccome tutte le altre parti della Vite ſi diſporranno e ſi rappreſenteranno all' acqua nella medeſima ſituazione che la porzione *IL*; l' acqua anderà ſucceſſivamente in eſſa vite diſcendendo, ſebbene alla fine ſi troverà montata dal punto *I* al punto *O* da cui ſi vedrà in copia verſarſi.

SCOLIO.

67. Dalla ſurriferita ſpiegazione che è del Sig. Gallilei, il quale chiama tale macchina non ſolo meravigliosa, ma ancora miracoloſa ne potrebbe naſcere una difficoltà, ed è che ſe l' acqua foſſe ſolamente diſceſa, non dovrebbe trovarſi poi ſalita all' altezza del punto *O* ſopra il ſuo livello in cui era dapprima. Per riſpondere a queſto dubbio che può non laſciare contento l' animo dell' addotta ſpiegazione, e di cui pure il Sig. Gallilei non ne fa alcun motto, ſembrami che ſi debba prendere in conſiderazione il moto rotatorio del cilindro, il quale entra pure come *concauſa* nella produzione del mirabile effetto che la macchina ci rappreſenta; Poichè il cilindro aggirandoſi ſebbene laſci la ſteſſa inclinazione delle ſpire, alza però di continuo il piano inclinato per cui l' acqua diſcende, laſciandolo però ſempre parallelo a ſe ſteſſo oſſia alla ſua prima poſizione, e quindi ne ſegue che nel tempo ſteſſo che l' acqua diſcende per la forza di ſua gravità nella vite avvolta al cilindro, dal moto e dalla forza di

queſto è ancora ſollevata di continuo, e più di quello che diſcenda per ſe ſteſſa, cosicchè può dopo un dato tempo cominciare a ſgorgare dalla ſommità del canale immerſo, in cui però per forza di ſua gravità viene eſſa ſucceſſivamente a diſcendere. Con tale oſſervazione che pur ſi moſtra neceſſaria a farſi, ſembrami che ſia tolto ogni dubbio, e che ſvaniſca ogni aria di miſtero nella ſpiegazione ſopra addotta, di modo che appare anch' eſſa evidente al pari delle altre.

Alcuni Autori hanno voluto aſſegnare la forza di queſta macchina, ma i loro calcoli ſono troppo proliſſi e complicati per aver luogo in queſto elementare Trattato, in cui baſta di averne dato una chiara meccanica ſpiegazione.

PROBLEMA X.

68. Eſporre la forza del Cuneo.

RISOLUZIONE. Si rappreſenti (*Fig.*45.) la forza con cui le parti di un corpo reſiſtono alla vicendevole ſeparazione per una retta *R*. Se verrà applicata una forza *F* ſulla faccia *AC* del Cuneo, tale che ſtia alla reſiſtenza *R*, come la metà della maſſima groſſezza del Cuneo alla ſua intiera altezza, cioè :: *AF* : *FP* ſi avrà equilibrio tra la forza e la reſiſtenza. Imperocchè dovendoſi muovere il Cuneo contro il corpo *MNHE* ſecondo la direzione di ſua altezza per qualunque minimo ſpazio *Pp*, ſarà neceſſario che le parti del corpo *ME* ſi diſgiungano allontanandoſi per lo ſpazio *PO*. La velocità adunque della potenza, che ſpinge e incalza il Cuneo, ſarà alla velocità con cui ſi muove la reſiſtenza, come *Pp* : *PO* oſſia :: *FP* : *FC* (eſſendo ſimili i triangoli *PpO* ed *FPC*); Ma per Ipoteſi ſi ha *F* : *R* ::

FC : *FP*. Dunque in tale ſuppoſizione ſaranno reciproche le velocità alle forze, e i due riſpettivi eguali momenti della potenza e della reſiſtenza (*N.* 12.) ſi dovranno equilibrare (*Aſs.* 4.), e con ogni picciolo vantaggio che ſi dia al momento della potenza, prevarrà eſſa alla data reſiſtenza, e dovrà il tagliente del Cuneo inſinuarſi nel corpo *ME*, e ſepararne le parti.

SCOLIO.

69. Tutti gli ſtromenti che ſi uſano per fendere o tagliare ſi poſſono ridurre alla natura del Cuneo, e ſi potrà quindi collo ſteſſo metodo indagarne la riſpettiva loro forza.

CAPO SESTO.

DEL MOTO ACCELERATO, E RITARDATO.

TEOREMA I.

70. SE un corpo ſarà ſpinto dalla quiete al moto da una forza, che agiſca di continuo, e ſecondo la ſteſſa direzione, il movimento di eſſo ſi renderà ſucceſſivamente più celere.

DIMOSTRAZIONE. Una forza che agiſca di continuo, e colla ſteſſa direzione sù di un mobile, imprime ad eſſo di continuo nuovi gradi di velocità; Ma i gradi anteriori di velocità debbono perſeverare (*Aſs.* 2.), preſcindendoſi quindi da ogni azione contraria, che potrebbe diſtruggerli. Dunque i nuovi gradi di velocità ſi aggiungeranno agli

La Teoria generale di queſto moto ſi deve all' immortale Sig. Gallileo de' Gallilei,

anteriori, e quindi la velocità anderà creſcendo nel mobile, oſſia il movimento di eſſo ſi renderà ſucceſſivamente più celere.

TEOREMA II.

71. Se il mobile ſarà ſpinto al moto da una forza, che agiſca di continuo ed egualmente, ſecondo la ſteſſa direzione, l' accelerazione del moto ſarà uniforme, oſſia avraſſi il moto uniformemente accelerato.

DIMOSTRAZIONE. Una forza che operi egualmente e di continuo, e ſecondo la ſteſſa direzione, imprime continui ed eguali gradi di velocità al mobile cui ſpinge al moto (*Aſs.* v.). Ma un mobile il quale riceve in eguali tempi continui, ed eguali gradi di velocità, deve accelerare il moto ſecondo la legge delle velocità ſucceſſivamente accreſciute (*Aſs. cit.*). Dunque eſſendo uniformi i gradi di velocità ſucceſſivamente impreſſi al mobile, uniforme ſarà ancor in eſſo l' accelerazione del moto, oſſia avraſſi il moto uniformemente accelerato.

COROLLARIO.

72. Saranno quindi le velocità nel moto uniformemente accelerato proporzionali ai tempi; poichè preſi tempuſcoli minimi, in ognuno pure di queſti riceverà il mobile un nuovo impulſo al moto, oſſia un grado eguale di velocità. Dunque anche nella ſomma di un dato numero di iſtanti riceverà un eguale numero di gradi di velocità eguali al primo, coſicchè ſe nel tempo finito *T* riceve un grado

finito di velocità V, in un altro tempo moltiplice per esempio $3T$ riceverà un moltiplice grado di velocità $3V$, e così di seguito, nella fatta Ipotesi del moto con egual legge accelerato, ci si dimostreranno tutt' ora le velocità proporzionali ai tempi, ossia sarà generalmente $V : u :: T : t$.

SCOLIO

73. Potendosi poi la forza di gravità nella superficie terrestre, e nelle minime distanze da essa assumere fisicamente per costante, animerà questa i corpi al moto imprimendo ad essi continui ed eguali gradi di velocità secondo la stessa direzione (*Ass.* 1.). I corpi adunque che cadono liberamente per forza di loro gravità in picciole distanze dalla superficie terrestre discenderanno (*N.*71.) con un moto uniformemente accelerato.

TEOREMA III.

74. Nel moto uniformemente accelerato che incominci dalla quiete, (*Fig.* 11.) gli spazj che saranno percorsi in tempi finiti si potranno esprimere per mezzo di triangoli rettangoli, i cateti dei quali dinotino i tempi e le velocità finali, ossia acquistate alla fine del moto.

DIMOSTRAZIONE. Dinoti la retta AD il tempo e le sue infinitesime ed eguali parti AP, PF ec. gli infinitesimi eguali tempetti della caduta, e sia Pm la velocità acquistata nel primo tempetto dal mobile cadente liberamente dal punto A, e condotta la indefinita AmC si compia il triangolo rettangolo ADC. Chiara cosa è a vedersi che tutte le

suc-

ſucceſſive ordinate *Pm*, *Fi* ec. eſprimeranno le velocità acquiſtate dopo i ſucceſſivi tempi *AP*, *AF*, eſſendo tali aſciſſe proporzionali alle ordinate *Pm*, *Fi* ec., come lo ſono i tempi alle velocità (*N.* 72.). Ma gli ſpazj ſono in ragione compoſta dei tempi e delle velocità (*Aſs.* VI.). Adunque potrannoſi nel moto uniformemente accelerato, che cominci dalla quiete eſprimere gli ſpazj percorſi per mezzo di triangoli rettangoli, i cateti dei quali dinotino i tempi, e le finali velocità.

SCOLIO.

75. Volendoſi ſupporre invariabile e coſtante la velocità acquiſtata nel primo infiniteſimo tempuſcolo, lo ſpazio percorſo nel primo dato iſtante ci verrebbe eſpreſſo dal rettangolo *PG* (*N.* 4.), e lo ſpazio fatto nel ſecondo iſtante ſarebbe eſpreſſo dal rettangolo *Fn*, e così di ſeguito; laonde nel moto uniformemente accelerato che incominci dalla quiete lo ſpazio percorſo in tutto il tempo finito *AD*, che è la ſomma di tutti i tempuſcoli infiniteſimi *AP*, *PF* ec. ſembra che ſi dovrebbe eſprimere per la ſomma dei ſucceſſivi rettangoli *PG*, *Fn* ec. Se però bene la coſa ſi eſamini, ſi trova che la ſomma dei detti rettangoli non è diverſa dal Triangolo *ADC* che per una quantità infiniteſima, o nulla, poichè le picciole prominenze o triangoletti *AGm*, *mni*, *ipr* ec. ſino all' infinito, ſono un infiniteſimo per rapporto al triangolo *ADC*, eſſendo i primi eguali alla ſomma della ſerie 1, 1, 1, 1, 1 ec. continuata ſino all' infinito, e l'altro eguale alla ſomma della ſerie 1, 3, 5, 7 ec. ſino all'infinito, come dal numero degli eguali triangoletti

corriſpondenti facilmente appariſce; ma tali ſerie ſommate ſtanno tra loro come $\infty : \infty^2$, oſſia dividendo come $1 : \infty$ (*). Adunque nel moto uniformemente accelerato il quale cominci dalla quiete lo ſpazio fatto nel tempo finito *AD* ſarà eſpreſſo eſattamente dal triangolo *ADC* rettangolo, i cateti di cui ci eſprimeranno i tempi, e le velocità finali, il che varrà in qualunque altro tempo ſimilmente, che ci piaccia di aſſumere.

COROLLARIO I.

76. Saranno quindi gli ſpazj percorſi nel moto uniformemente accelerato proporzionali ai quadrati dei tempi, o delle velocità. Poichè gli ſpazj ſi poſſono eſprimere per mezzo di triangoli rettangoli, per il Teorema; Ma i triangoli tra loro ſono come i quadrati dei lati omologi che eſprimono i tempi, e le velocità. Dunque ſaranno gli ſpazj in ragione dei quadrati dei tempi o delle velocità.

Denominati quindi gli ſpazj S ed s, e le velocità V ed v, ed i tempi T e t ſi avranno le due ſeguenti analogie $S : s :: V^2 : v^2$, ed $S : s :: T^2 : t^2$.

(*) Preſa in fatti la formola generale della ſomma di una Serie Aritmetica di cui ſi ignori l' ultimo termine, chiamato il primo termine a; la differenza d; il numero dei termini n; ed S la Somma, cioè $S = \frac{2an+dn^2-dn}{2}$ ſi avrà per la ſerie 1, 1, 1, 1 continuata ſino all' infinito, $S = \frac{2n}{2} = n = \infty$

Per la Serie poi 1, 3, 5 ec. la formola generale ſi cangierà nella ſeguente $S = \frac{2n+2n^2-2n}{2}$, oſſia $S = n^2 = \infty^2$.

COROLLARIO II.

77. Saranno ancora le velocità come pure i tempi proporzionali alle radici degli ſpazj percorſi; Poichè ſe dai quattro Termini delle due ſuperiori proporzioni $S : s :: T^2 : t^2$, ed $S : s :: V^2 : v^2$ ſi eſtrarranno le radici quadrate, ſi avrà $T : t :: VS : Vs$, ed $V : v :: VS : Vs$.

COROLLARIO III.

78. Aſſumendoſi i tempi che creſcono giuſta la ſerie naturale dei numeri 1, 2, 3, 4, 5 ec. le ſomme degli ſpazj percorſi alla fine di ciaſcun tempo creſceranno ſecondo la ſerie dei numeri 1, 4, 9, 16 (*N.* 76.) che ſono i quadrati dei ſucceſſivi numeri naturali 1, 2, 3 ec.

COROLLARIO IV.

79. Se ſi computeranno gli ſpazj percorſi ſucceſſivamente in ciaſcun tempo fin dal principio del moto, ſi troveranno queſti creſcere in ciaſcun tempo come i numeri diſpari 1, 3, 5, 7, 9 ec. Poichè conſiderandoſi lo ſpazio percorſo da un mobile in un dato tempo come 1, dovrà eſſo mobile percorrere tre ſimili ſpazj in un eguale ſucceſſivo tempo, affine di averne percorſi alla fine di queſto ſecondo tempo 4 (*N.* 76.), che è il quadrato del numero 2, e così nel terzo dovrà ſcorrerne 5, affinchè alla fine del terzo tempo abbia percorſo 9 ſpazj, che è il quadrato del numero 3, e così di ſeguito. Ciò ſi fa manifeſto ancora dal numero dei triangoletti eguali

(*Fig.*11.) che dinotano i ſucceſſivi ſpazj percorſi nei ſucceſſivi tempi; Poichè nel primo tempo ſi ha il triangolo *APm* per valore eſpreſſivo del primo ſpazio (*N.* 74.); nel ſecondo tempo ſi hanno tre triangoletti eguali al primo, compreſi nell' area *Pi*; nel terzo ſe ne hanno 5 compreſi nell' area *Fr*, e così di ſeguito ſi trovano gli ſpazj percorſi nei ſucceſſivi tempi, eſpreſſi da una ſerie. di eguali triangoletti creſcente colla legge dei numeri 1, 3, 5, 7, 9 ec. Dunque ec. ec.

SCOLIO.

80. Il celebre Sig. Gallilei non contento di aver dimoſtrato teoricamente i principj quì ſopra ſtabiliti, li verificò in oltre colla eſperienza nella diſceſa dei corpi per piani inclinati, nei quali ſiccome il moto è più lento, così ancora gli eſperimenti rieſcono più facili ed evidenti. Secondo le oſſervazioni più eſatte fatte in ſeguito dall' Accademia di Parigi un grave cadendo liberamente percorre in un minuto ſecondo 15 piedi Parigini, 1 pollice, e linee 2 $+\frac{1}{10}$: nel ſecondo 45 piedi, pollici 3, e linee $6+\frac{1}{10}$, e così ſucceſſivamente nel terzo piedi 75, pollici 5, linee 10 e $\frac{1}{10}$. Il divario della legge dei numeri 1, 3, 5, 7, 9 ec. è tanto picciolo da doverſi onninamente traſcurare, e da attribuirſi piuttoſto alla benchè menoma diverſità della gravità nelle varie diſtanze dei corpi dal centro, la quale da noi ſi ſuppone coſtante, e alla diverſa reſiſtenza dell' aria contro i corpi più veloci ſulla fine, che ſul principio del moto. Che poi diverſi corpi cadano nell' aria da una eguale altezza in differente tempo, ciò non all' indole della

gravità, ma alla diverſa reſiſtenza dell' aria contro ai volumi dei corpi combinati con maggiore o minore maſſa ſi deve attribuire. In fatti nel vuoto cadono tutti i corpi da eguali altezze nello ſteſſo tempo, e con egual legge d' accelerazione.

TEOREMA IV.

81. Gli ſpazj percorſi nel moto uniformemente accelerato ſaranno la metà di quelli, che nello ſteſſo tempo verrebbero ſcorſi nel moto uniforme, e colla velocità acquiſtata ſulla fine del ſuddetto moto con egual legge accelerato.

DIMOSTRAZIONE. Gli ſpazj percorſi nel moto con legge uniforme accelerato ſi poſſono eſprimere per mezzo di triangoli rettangoli le ordinate, e le aſciſſe dei quali dinotino i tempi, e le velocità ſucceſſivamente acquiſtate (*N.* 74.). Ma gli ſpazj fatti nello ſteſſo tempo con moto uniforme, oſſia colla data velocità finale, che duri coſtante in tutto il tempo del moto ſi eſprimerebbero per rettangoli (*N.* 4.), che per Ipoteſi avrebbero la ſteſſa baſe e altezza dei ſuddetti triangoli, e che però ſarebbero doppj di queſti. Adunque gli ſpazj percorſi nel moto uniformemente accelerato ſaranno la metà di quelli, che nello ſteſſo tempo verrebbero ſcorſi nel moto uniforme e colla velocità acquiſtata ſulla fine del ſuddetto moto con egual legge accelerato.

COROLLARIO.

82. Generalmente adunque per trasferire le formole esprimenti gli spazj percorsi nel moto uniformemente accelerato, agli spazj che si sarebbero passati nello stesso tempo, e colla velocità finale di questo nel moto uniforme ed equabile, si dovranno raddoppiare le suddette formole, per il Teorema, e si avrà l' intento.

TEOREMA V.

83. Se i movimenti di due corpi verranno accelerati da due diverse forze, le velocità da essi acquistate dopo un qualunque tempo saranno in ragione composta delle forze acceleratrici, e de' tempi in cui agiscono le dette forze.

DIMOSTRAZIONE. Poste le forze eguali ed agenti di continuo e uniformemente, saranno le velocità proporzionali ai tempi in cui si considerano agire queste forze (*N.* 72.). Se poi saranno eguali i tempi ed ineguali le forze, in tale caso saranno le velocità proporzionali alle suddette forze, le quali imprimono con legge costante le successive velocità al moto (*Ass.* v.). Supposta adunque ineguaglianza dei due elementi, dai quali risulta maggiore o minore la velocità, cioè presi ineguali tempi, e forze disuguali, saranno le velocità in ragione composta dalle forze e dei tempi, in cui si suppongono agire.

Denominandosi quindi le forze acceleratrici G e g, si avrà la generale proporzione $V : v :: GT : gt$.

COROLLARIO I.

84. Saranno quindi i tempi in ragione composta diretta delle velocità, e reciproca delle forze, e le forze, in ragion diretta delle velocità e reciproca dei tempi; Poichè presa la superiore proporzione $V : v :: GT : gt$ avrassi $Vgt = vGT$, e risolvendo s'avrà $G : g :: Vt : vT$, e $T : t :: gV : Gv$.

TEOREMA V.

85. Gli spazj percorsi da due mobili spinti da due ineguali forze, che agiscano però uniformemente e di continuo, saranno in ragione composta delle forze, e dei quadrati dei tempi.

DIMOSTRAZIONE. Supposte le forze eguali gli spazj sono come i quadrati dei tempi (*N.* 75.). Posti poi eguali i tempi, e ineguali le forze, saranno gli spazj proporzionali alle cause motrici che li determinano come effetti, cioè alle forze (*Ass.* v.), omettendosi gli equemoltiplici dei tempi. Non supposta adunque eguaglianza di tempi o di forze, saranno gli spazj in ragione composta delle forze, e dei quadrati dei tempi.

Ritenute quindi le denominazioni superiori avrassi l'analogia. $S : s :: GT^2 : gt^2$.

COROLLARIO

86. Coll'uso e paragone delle superiori analogie già stabilite si dedurranno altre proporzioni risguardanti i rapporti

tra i tempi, e le velocità, le forze, e gli ſpazj. Primieramente paragonando inſieme le due $S : s :: GT^2 : gt^2$, e $T : t :: gV : Gv$ ſtabilite di ſopra (*N.* 84; 85), ſe ne trarrà queſt' altra $S : s :: \frac{V^2}{G} : \frac{v^2}{g}$, poichè quadrando tutti i termini della ſeconda, e ſoſtituiti poi i valori di T^2 e di t^2 nella prima ſi ottiene $S : s :: \frac{GV^2}{G^2} : \frac{gv^2}{g^2}$, oſſia $S : s :: \frac{V^2}{G} : \frac{v^2}{g}$ d' onde ſi cava che gli ſpazj ſaranno nel moto uniformemente accelerato in ragione diretta dei quadrati delle velocità, e reciproca delle forze.

Secondariamente da queſt' ultima ſteſſa ricaveraſſi di leggieri un altra analogia per le velocità, poichè moltiplicandoſi i due antecedenti per G, ed i due conſeguenti per g avraſſi $SG : sg :: V^2 : v^2$, e quindi eſtraendoſi dai quattro termini le riſpettive radici avraſſi $V : v :: \sqrt{GS} : \sqrt{gs}$ cioè le velocità ſeguiranno la ragione compoſta ſuddupplicata delle forze e dagli ſpazj.

In terzo luogo ſi troverà ancora l' analogia per i tempi $T : t :: \sqrt{\frac{S}{G}} : \sqrt{\frac{s}{g}}$ per avere la quale non ſi avrà che a richiamare la ſuperiore proporzione $S : s :: GT^2 : gt^2$ (*N.*85.), e dividendo come ſopra, ed eſtraendo le radici da tutti e quattro i termini, ſi troverà appunto $T : t :: \sqrt{\frac{S}{G}} : \sqrt{\frac{s}{g}}$, d' onde ſapremo eſſere i tempi in ragione ſuddupplicata diretta dagli ſpazj e reciproca delle forze.

Final-

Finalmente richiamandoſi quivi la formola altrove ſtabilita (*N.* 10.), cioè $F : f :: MV : mv$, dividendo riſulterà $\frac{F}{M} : \frac{f}{m} :: V : v$, e introducendo i valori generali della velocità, ſuperiormente in queſto Teorema aſſegnati, avranſi le due ſeguenti analogie, cioè $\frac{F}{M} : \frac{f}{m} :: \sqrt{GS} : \sqrt{gs}$, ed $\frac{F}{M} : \frac{f}{m} :: GT : gt$, le quali formole ci potranno di molto giovare per paragonare inſieme gli ſpazj, i tempi, le velocità, ed anche le maſſe, e la totale quantità di moto, nell' Ipoteſi, che ſia uniformemente accelerato.

Occorrendo poi di trasferire le ſuperiori formole dal moto uniformemente accelerato al moto equabile, in cui ſi deve conſiderare per coſtante la velocità acquiſtata alla fine del moto uniformemente accelerato, ne riſulteranno doppj gli ſpazj percorſi nello ſteſſo tempo, e raddoppiate quindi le eſpreſſioni degli ſpazj (*N.* 82.), ſi avrà per il moto uniforme $V : v :: 2\sqrt{GS} : 2\sqrt{gs}$; $V : v :: \frac{2F}{M} : \frac{2f}{m}$

Vedaſi quanto ſi è avvertito nella Prefazione di queſt' Opera.

TEOREMA VI.

86. Se due mobili entrerannno nel moto uniformemente accelerato con una velocità data, e chimeranſi N ed n i tempi, in cui avrebbero acquiſtata tale velocità nel moto con egual legge accelerato; R ed r gli ſpazj da percorrerſi; T e t i tempi, che impiegheranno i mobili per arrivare

alla velocità finale dalla quiete, avraſſi per il rapporto degli ſpazj, in tale ipoteſi, traſcorſi $R : r :: T^2 - N^2 : t^2 - n^2$.

DIMOSTRAZIONE. Siano P e p gli ſpazj, che avrebbero percorſi i due mobili nel moto uniformemente accelerato, incominciando dalla quiete, affine di acquiſtare la velocità data, e chiaminſi S ed s gli ſpazj totali dovuti alla velocità acquiſtata alla fine del moto computato dalla quiete, ſarà (*N.* 76.) $T^2 : S :: N^2 : P$, oſſia $T^2 : N^2 :: S : P$, e dividendo e alternando, $T^2 - N^2 : S - P :: N^2 : P :: T^2 : S$. Similmente ſarà $t^2 - n^2 : s - p :: T^2 : S$, e perciò $T^2 - N^2 : t^2 - n^2 :: S - P : s - p$; ma $S - P$ ed $s - p$ ſono gli ſpazj, che attualmente i mobili traſcorrono colle due forze coſtante ed acceleratrice nei due tempi $T - N$ e $t - n$, che ſono ſtati denominati R ed r. Dunque riſulterà l' analogia propoſta $R : r :: T^2 - N^2 : t^2 - n^2$.

TEOREMA VII.

87. Gli ſpazj percorſi nel moto uniformemente accelerato, computati dopo che il mobile avrà acquiſtata una data velocità, ſi potranno eſprimere per mezzo di trapezj (*Fig.* 11.).

DIMOSTRAZIONE. Lo ſpazio ſcorſo nel moto con uniforme legge accelerato, che cominci dalla quiete, ſino ad acquiſtare una data velocità Pm, ſi può eſprimere per mezzo del triangolo APm, e ſimilmente lo ſpazio fatto in tutto il tempo AD, ſupponendo che cominci la velocità da zero nel punto A, ſi potrà eſprimere per mezzo del triangolo ADC (*N.* 74.). Ma quivi ſi cerca lo ſpazio ſoltanto, che il mobile ha traſcorſo dopo aver acquiſtata una data velocità Pm, che ſucceſſivamente ſi è poi accreſciuta. Dunque

ci converrà ſottrarre dall' intiero triangolo *ADC* il minor triangolo *APm* per avere lo ſpazio, che ſolo ſi ricerca. Ma il triangolo *ADC* — *APm* è eguale ad un trapezio *PmDC*, e lo ſteſſo vale in tutti gli altri conſimili caſi. Dunque gli ſpazj percorſi nel moto uniformemente accelerato, computati dopo che il mobile avrà acquiſtata una data velocità, potranſi eſprimere per trapezj.

PROBLEMA I.

88. Determinare lo ſpazio, che farà un grave cadendo in qualunque minuto *neſimo*, ſuppoſto che cominci il ſuo moto determinato dalla ſola legge di gravità.

RISOLUZIONE. Tutt' i gravi cadendo liberamente percorrono ſucceſſivamente ſpazj, che computati dal principio del moto, creſcono come i numeri 1, 3, 5, 7, 9 ec. (*N.* 79.). Il Problema adunque ſi riduce a trovare qualunque termine ſi voglia, anche più rimoto di queſta ſerie. Ora l'eſpreſſione generale di ogni termine di queſta ſerie, che è aritmetica, denominando il primo termine a, l'ultimo u, la differenza d, ed il numero dei termini n ſi è $u = a + dn - d$. Si determini adunque n, che è arbitraria, e ſi avrà ſubito noto l'ultimo termine u, che ſi cerca, eſſendo dato di lor natura (*N.* 79.) il primo termine, e la differenza che regna nella progreſſione.

APPLICAZIONE. Si cerchi, per eſempio, quanti ſpazj percorrerà un grave nel 50″ minuto di ſua caduta, eſſendo dato lo ſpazio fatto nel primo minuto, che ſerva di unità. La formola ſuperiore al caſo applicata, cioè $u = a + dn - d$, diverrà $u = 1 + 100 - 2 = 99$, che ſarà il numero degli ſpazj percorſi nel 50″ minuto.

PROBLEMA II.

89. Trovare la ſomma degli ſpazj percorſi nella ſteſſa Ipoteſi, dopo un numero n dato di minuti o tempuſcoli.

RISOLUZIONE. Si trovino gli ſpazj percorſi nell' ultimo tempuſcolo o minuto, applicando il termine generale come ſopra (*N. preced.*), e ſi avranno così noti il primo e l' ultimo termine della ſerie da ſommarſi, e determinata avraſſi con tutta facilità la ſomma degli ſpazj che ſi ricerca; poichè preſa l'eſpreſſione generale della ſomma di ogni ſerie aritmetica, di cui abbianſi noti il primo e l'ultimo termine, cioè $S = \overline{a+u} \times \frac{n}{2}$, non ſi avranno che a ſoſtituire i valori numerici determinati, e il prodotto ci darà la ſomma ricercata.

APPLICAZIONE. Si cerchi, a cagion d'eſempio, la ſomma degli ſpazj percorſi dopo il 40″ minuto della caduta di un grave, deſumendoſi l'unità dello ſpazio da quello, che ſi percorre nel primo minuto. Gli ſpazj, che percorrerà nel 40″ minuto ſaranno $= a + dn - d = 1 + 80 - 2 = 79$. La ſomma dunque di tutti gli ſpazj percorſi dal primo ſino al 40″ minuto, ſarà $= \overline{a+u} \times \frac{n}{2} = \overline{1+79} \times \frac{40}{2} = 1600$.

PROBLEMA III.

90. Data la ſomma degli ſpazj, ſi potrà ancora trovare il numero dei tempuſcoli o minuti, in cui ſi ſarà traſcorſa la data ſomma di ſpazj.

RISOLUZIONE. Preſa la formola generale della ſomma di una ſerie aritmetica, di cui ſia ignoto l'ultimo termine,

cioè $S = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$, si dovrà sciogliere una equazione di secondo grado per separare n, e risulterà $n = -\left(\frac{2a-d}{2d}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2 + \frac{2S}{d}}$.

APPLICAZIONE. Sia data, a cagion d'esempio, la somma di 256 spazj percorsi da un grave caduto liberamente, e si cerchi il numero dei minuti, che avrà dovuto impiegare nel percorrerli. Facendo le debite sostituzioni dei numeri al luogo delle quantità letterali cognite, si troverà $n = -\left(\frac{2-2}{4}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2-2}{4}\right)^2 + \frac{2 \cdot 256}{2}}$; ossia $n = 16$. Dopo il 16 minuto adunque di sua caduta, avrà percorsa la somma di 256 spazj eguali a quello, che avrà trascorso nel primo minuto di sua caduta.

TEOREMA VIII.

91. Se un corpo mosso sarà risospinto da una minor forza, che agisca di continuo, e con direzione contraria, il movimento di esso ritarderassi, e tale ritardo sarà ancora uniforme, se la forza non solo agirà di continuo, ma ancora egualmente.

DIMOSTRAZIONE. Un corpo mosso, e risospinto da una minor forza, che agisca di continuo, e con contraria direzione, ricever deve continui decrementi nella sua velocità, poichè ad ogni istante si elide una forza eguale a quella che agisce in contrario (*Ass.* 4.). Ma diminuendosi la velocità, si deve rendere ancora meno celere il moto. Adun-

que ec. Se poi queſta forza contraria al moto concepito dal inobile, oltre all' agire di continuo, agirà ancora egualmente, i decrementi prodotti nella velocità del corpo ſaranno continui ed eguali (*Aſs.* V.). Ma un corpo, che fa continove ed eguali perdite di velocità, in ciaſcun iſtante deve ritardare il ſuo moto (*Aſs.* cit.) ſecondo la legge delle velocità ſucceſſivamente ſminuentiſi di un egual grado. Adunque uniforme ancora ſarà in tale Ipoteſi la ritardazione del moto, oſſia avraſſi un movimento unlformemente ritardato.

COROLLARIO.

92. Nel moto uniformemente ritardato, i gradi di velocità ſucceſſivamente perduti dal mobile, ſaranno proporzionali ai tempi; poichè preſo ogni tempuſcolo minimo ed infiniteſimo, in cui agiſce ſucceſſivamente la forza di contraria direzione, ſi ſcemerà nel mobile un grado di velocità, per il Teorema, e preſa una data ſomma di tempetti, perderà eſſo mobile un egual numero di gradi eguali di velocità, eſſendo ſuppoſta agire di continuo la forza contraria; coſicchè ſe nel tempo finito T perderà la velocità V in un altro moltiplice del dato tempo, per eſempio $3T$, perderà la velocità $3V$, e così di ſeguito. Adunque i gradi di velocità ſucceſſivamente perduti, ſeguiranno la ragione de' tempi.

TEOREMA IX.

93. Gli ſpazj fatti nel moto uniformemente ritardato ſino alla ceſſazione del moto, ſi potranno eſprimere per mezzo di triangoli rettangoli.

DIMOSTRAZIONE. Gli ſpazj percorſi nel moto uniformemente ritardato, che termini nella quiete (*Fig.* 11.), ſono quegli ſteſſi, che ſi poſſono avere in un egual tempo nel moto, colla ſteſſa e uniforme legge accelerato, che incominci dalla quiete, e giunga ad acquiſtare una data velocità. Imperocchè ſe nel tempo *AD*, ſuppoſto il moto uniformemente accelerato, la velocità cominciando da *o* in *A*, è divenuta = *DC* nel moto con egual legge ritardato, e nello ſteſſo tempo la velocità *DC* data a principio, diverrà = *o* in *A*; ma gli ſpazj nel moto uniformemente accelerato, ſi poſſono eſprimere per triangoli rettangoli, i lati de' quali raffigurino i tempi e le velocità corriſpondenti (*N.* 74.). Dunque gli ſpazj ancora ſcorſi nel moto uniformemente ritardato, ſi potranno eſprimere per triangoli rettangoli, i lati de' quali ritengano le medeſime eſpreſſioni.

COROLLARIO I.

94. Saranno perciò gli ſpazj nel moto uniformemente ritardato, che termini nella quiete, proporzionali ai quadrati dei tempi o delle velocità; poichè in queſto moto ſi poſſono pure eſprimere gli ſpazj per mezzo di triangoli rettangoli, i cateti de' quali dinotino i tempi e le riſpettive velocità per il Teorema; ma le arèe de' triangoli ſono come i quadrati de' lati omologi. Dunque ſaranno gli ſpazj come i quadrati di queſti lati, oſſia come i quadrati de' tempi, o delle velocità, e ſi avranno quivi pure le due ſeguenti analogie $S : s :: T^2 : t^2$, ed $S : s :: V^2 : v^2$.

COROLLARIO II.

95. Si potranno di leggieri quindi dedurre tutte le altre formole ſtabilite per il moto uniformemente accelerato, introducendo nelle due ſuperiori analogie gli elementi pure delle forze, e ſiccome nel moto con legge uniforme ritardato, ſi cominciano a computare gli ſpazj dalla fine del moto uniformemente accelerato, creſcendo in queſto gli ſpazj come i numeri diſpari 1, 3, 5, 7, 9, ec. (*N.* 79.), decreſceranno nel ritardato, ſecondo la ſteſſa legge.

COROLLARIO III.

96. Gli ſpazj fatti nel moto uniformemente ritardato, prima della ceſſazione del moto, ſi potranno eſprimere per mezzo di trapezj (*Fig.* 11.). Poichè i ſuddetti ſpazj computati ſino alla ceſſazione del moto, ſi eſprimono per mezzo di triangoli (*N.* 93.). Suppoſto poi che la velocità non divenga zero, e che ſi vogliano gli ſpazj ſoltanto fino a un certo termine, prima della ceſſazione del moto, allora l'ordinata, per eſempio, *Fi* del triangolo, la quale eſprime la velocità reſidua, taglierà i lati del triangolo ſteſſo, pria che ſi uniſcano nel vertice, e formerà il trapezio *FDCi*, ch' eſprimerà gli ſpazj fatti in un dato tempo, prima della ceſſazione del moto.

CAPO

CAPO SETTIMO.

DELLA DISCESA LIBERA DE' CORPI PER I PIANI INCLINATI.

TEOREMA I.

97. LA gravità assoluta di un corpo posto sopra un piano inclinato all' Orizzonte sta alla relativa, da cui è spinto a discendere sul piano, come la lunghezza *AC* del piano all' altezza *AB* di esso (*Fig.* 46.).

DIMOSTRAZIONE. Sia situata una sfera, o altro qualsisia corpo sul piano inclinato *AC*, e tirata dal suo rispettivo centro di gravità la verticale *MR*, esprima questa la forza totale di sua gravità, e dallo stesso centro si abbassi la *MS* normale al piano. Tutta la forza del grave, con cui discenderebbe verticalmente, la quale si è espressa per *MR*, si potrà risolvere in due (*N.* 28.) l' una espressa per *MS*, la quale essendo perpendicolare al piano, s'impiegherà unicamente nel premerlo, e l'altra espressa per *SR*, che essendo parallela al piano, tutta s'impiegherà nell' accelerazione della caduta della sfera sul piano. Essendo poi simili i due triangoli *SMR*, *ABC* sarà *MR* : *SR* :: *AC* : *BA*. Dunque sarà ancora la gravità assoluta del mobile alla relativa, con cui discende, o tenta di discendere sul piano, come la lunghezza del piano all'altezza, ossia nella costante ragione di *AC* : *AB*.

Denominando quindi la gravità assoluta = *G*, e la relativa, che s'impiega a muovere il corpo sul piano = *R*, si avrà la costante proporzione *G* : *R* :: *AC* : *AB*, ossia $R = \frac{AB \cdot G}{AC}$.

COROLLARIO I.

98. Potendosi assumere poi *AC* per seno tutto, ossia per raggio, ed *AB* per seno retto dell' angolo *BCA* (*Fig.*46.), sarà la gravità assoluta di un corpo alla relativa, che si esercita sul piano, come il seno tutto al seno dell' angolo d'inclinazione del piano coll' Orizzonte.

COROLLARIO II.

99. Se sarà poi la massa del corpo *R* alla massa del corpo *M*, che si oppone alla caduta del grave *R*, come *AC* : *AB* (*Fig.*47.), ossia come il seno tutto al seno retto dell' angolo d'inclinazione del piano coll' Orizzonte, i due corpi dovranno fare equilibrio tra loro, poichè essendo reciproche le masse alle forze di gravità, da cui sono animate, e quindi alle velocità (*Ass.* V.) risulteranno i rispettivi momenti eguali (*N.*12.), ed otterrassi quindi equilibrio (*Ass.*III.) tra i due corpi *R* ed *M*.

COROLLARIO III.

100. Se le assolute gravità di due corpi si chiameranno *G* e *g*, e le relative di essi posti su' due piani inclinati *R* ed *r*, denominate pure le lunghezze dei piani *L* ed *l*, e le altezze *A* ed *a*, si avrà la generale analogia $R : r :: \frac{AG}{L} : \frac{ag}{l}$. Imperocchè la gravità relativa di un corpo posto sopra un piano inclinato è costantemente espressa per il prodotto della gravità assoluta nell' altezza del piano diviso per la lun-

ghezza (*N.* 97.), ossia per $\frac{AG}{L}$. Similmente la gravità relativa dell' altro corpo posto sull' altro piano, sarà espressa per $\frac{ag}{l}$. Adunque sarà $R : r :: \frac{AG}{L} : \frac{ag}{l}$, ossia saranno le gravità relative di due corpi posti su' due piani inclinati in ragione composta diretta delle gravità assolute, e delle altezze de' piani, e reciproca delle lunghezze.

COROLLARIO IV.

101. Se le gravità assolute di due corpi saranno eguali, le gravità relative saranno in ragione diretta delle altezze, e reciproca delle lunghèzze. Poichè presa la superiore proporzione $R : r :: \frac{AG}{L} : \frac{ag}{l}$ (*N.* 100.), non si avranno che a tagliare gli equemoltiplici G e g, e rimarrà soltanto $R : r : \frac{A}{L} : \frac{a}{l}$.

COROLLARIO V.

102. Se i piani saranno egualmente lunghi, le gravità relative saranno in ragione diretta delle gravità assolute e delle altezze de' piani. Perciocchè dalla proporzione ecumenica $R\ r :: \frac{AG}{L} : \frac{ag}{l}$ (*N.* 100.), si potranno togliere i divisori supposti eguali, cioè L ed l, ed avrassi $R : r :: AG : ag$.

COROLLARIO VI.

103. Se i piani saranno egualmente alti, le gravità relative ed acceleratrici de' corpi sui piani saranno in ragion

diretta delle gravità assolute, e reciproca delle lunghezze: Poichè nella fatta Ipotesi saranno eguali i fattori A ed a, e tolti questi dalla superiore proporzione, rimane $R : r :: \frac{G}{L} : \frac{g}{l}$.

COROLLARIO VII.

104. Supponendosi i piani egualmente lunghi ed alti, le gravità relative de' corpi posti sui piani inclinati, saranno direttamente come le assolute. Poichè essendo $A = a$ ed $L = l$ per Ipotesi, tolti dalla generale analogia $R : r :: \frac{AG}{L} : \frac{ag}{l}$ gli equemoltiplici A ed a, ed i sottomoltiplici L ed l, risulterà $R : r :: G : g$.

COROLLARIO VIII.

105. Se le altezze dei piani saranno reciprocamente come le gravità assolute, le relative saranno in ragione inversa delle lunghezze. Imperocchè essendo per Ipotesi $A : a :: g : G$, sarà $AG = ag$, e nella analogia generale avendo queste quantità la natura di equemoltiplici, si potranno togliere e trascurare, e rimarrà $R : r :: \frac{1}{L} : \frac{1}{l}$; ossia $R : r :: l : L$.

COROLLARIO IX.

106. Se le altezze de' piani saranno come le lunghezze, ossia se i piani saranno simili, le gravità rispettive saranno ancora come le assolute. Poichè essendo per Ipotesi $A : a :: L : l$, sarà $Al = aL$. Presa adunque la formola $R : r :: \frac{AG}{L} : \frac{ag}{l}$, e liberata dagli equemoltiplici, che da l'Ipotesi, s'avrà $R : r :: G : g$.

COROLLARIO X.

107. Poſte le lunghezze de' piani proporzionali alle gravità aſſolute, le gravità riſpettive ſaranno come le altezze. Poichè dalla condizione data ſi ha $L : l :: G : g$, oſſia $Lg = lG$, e perciò la formola che trattiamo $R : r :: AGl : agL$, diverrà in tal caſo più ſemplice, e ſarà $R : r :: A : a$.

COROLLARIO XI.

108. Se i piani inclinati ſaranno corde dello ſteſſo cerchio, tirate da un eſtremo del diametro, le gravità relative di corpi eguali ad eſſe ſovrapoſti (*Fig.* 48.), ſaranno direttamente come le lunghezze di eſſe corde. Imperocchè ſupponganſi due corde *AF* ed *AE*, le quali s'intendano prolungate finchè giungano a toccare l'Orizzontale *BC* ſuppoſta tangente del cerchio nel punto *B*. La gravità aſſoluta di un corpo poſto ſul piano *AFC* alla relativa, ſarà come *AC* : *AB* (*N.* 97.), ed eſſendo ſimili i due triangoli *AFB*, *ABC* aventi un angolo comune oltre il retto, ſarà *AC* : *AB* :: *AB* : *AF*. Similmente ſi proverà che la gravità aſſoluta di un altro egual corpo poſto ſul piano *AED* alla relativa, ſarà come *AB* : *AE*. Dunque reſtando tuttora la gravità aſſoluta eſpreſſa per *AB*, le relative ci ſi eſprimeranno per le corde *AF*, *AE*, il che valendo di tutte le altre corde, che ſi poſſono condurre nello ſteſſo cerchio dallo ſteſſo punto *A*, ſarà generalmente vero che le gravità relative di corpi eguali poſti ſu' piani che ſiano corde dello ſteſſo cerchio, ſaranno direttamente proporzionali alle medeſime corde.

COROLLARIO XII.

109. Corpi eguali posti su' piani che abbiano le altezze proporzionali alle loro lunghezze, ossia posti sopra piani simili, avranno le loro rispettive gravità eguali, e connessi insieme con un filo, dovranno equilibrarsi tra loro. Poichè per condizione data dev'essere $A : a :: L : l$, e perciò $Al = aL$. Presa quindi la generale formola $R : r :: AGl : agL$, e tagliati gli equemoltiplici Al ed aL, ci rimarrà $R : r :: G : g$; ma i corpi sono pure dati eguali di peso, e però si ha pure $G = g$. Ridotta adunque l'analogia all' ultima semplicità, sarà $R : r :: 1 : 1$, ossia $R = r$. Essendo poi contrapposte due forze di gravità, che agiscono egualmente nei dati corpi venendo connessi con un filo, che accavalchi una caruccola, dovranno equilibrarsi tra loro (*Ass.*III.), e rimarranno del tutto immobili sui piani.

COROLLARIO XIII.

110. Se i corpi saranno posti sopra piani egualmente alti, e se saranno i pesi di detti corpi in ragione diretta delle lunghezze dei piani (*Fig.* 49.), avranno le rispettive loro gravità eguali. Perciocchè dovendo essere i pesi dei due corpi, M ed N in ragione delle lunghezze AC ed AD dei piani, ossia essendo $G : g :: L : l$, sarà pure $Gl = gL$. Siccome poi i piani ancora si suppongono egualmente alti, avendo per comune loro altezza la stessa retta AB, sarà pure $A = a$. Dalla formola adunque esprimente il rapporto delle gravità relative $R : r :: AGl : agL$, si potranno tagliare gli equemol-

tipliti AGl ed agL, e rimarrà $R : r :: 1 : 1$, oſſia $R = r$, cioè ſaranno nella fatta Ipoteſi le riſpettive gravità eguali. Ciò ſi potrà comprovare di leggieri colla eſperienza, poichè conneſſi i due corpi M ed N con una funicella che accavalchi la caruccola G, ſi vedrà farſi equilibrio tra loro.

COROLLARIO XIV.

111. Se i corpi ſaranno poſti ſu' piani egualmente lunghi, e in oltre ſaranno le maſſe reciproche alle altezze, riſulteranno le gravità relative eguali. Poichè per Ipoteſi ſi avrà $G : g :: a : A$, oſſia $GA = ga$, ed eſſendo date le lunghezze L ed l eguali, ſarà ancora $GAl = gaL$, e quindi per il rapporto neceſſario con tali quantità ſarà pure $R = r$.

COROLLARIO XV.

112. Se le maſſe, oſſia gravità aſſolute di due corpi ſaranno in ragione compoſta diretta delle lunghezze e reciproca delle altezze de' piani, le gravità relative ſaranno pure eguali. Perciocchè per condizione data dovrà eſſere $G : g :: La : lA$, oſſia $GAl = gaL$; ma ſi ha $R : r :: GAl : gaL$. Dunque ſarà $R = r$, oſſia troveranſi anche in queſto caſo le riſpettive gravità eguali.

COROLLARIO XVI.

113. Se tutta la forza, con cui diſcende un corpo per un piano inclinato AC ſarà eſpreſſa per il raggio ſteſſo AC, giunto il mobile ſul piano ES (*Fig.* 50.), la velocità, con cui muoveraſſi in ſeguito ſullo ſteſſo orizzontale piano CS,

ſarà eſpreſſa per *BC*, e il decremento quindi di ſua velocità nel paſſaggio dall' uno all' altro piano, ſarà eguale al ſeno verſo *EB*. Imperocchè ſi riſolva la forza *AC* nelle due *AB* e *BC* (*N.* 28.), e ſi vedrà chiaramente che tutta la forza *AB* perpendicolare al piano, reſterà eliſa da eſſo; e non produrrà alcun effetto di moto ſulla Orizzontale *BS*, e ſola reſterà la *BC* per muovere il corpo paſſato ſul piano *ES*; ma la differenza tra *BC* ed *AC* ſi è eguale al ſeno verſo *EB* dell' angolo *ACE* d'inclinazione del piano. Dunque ec.

TEOREMA II.

114. Una ſfera poſta ſopra un piano inclinato, non ſcenderà per eſſo rotolandoſi, ma ſtriſciandoviſi ſopra placidamente, ſecluſo però l'attrito naſcente dalla ſcabrezza de' corpi.

Dimostrazione. Dinoti la verticale *MR* la totale gravità o forza, che ſpinge il corpo al moto (*Fig.* 46.), e ſi tiri la *MS* normale al piano. Riſolvendoſi la *MR* nelle due *MS* ed *SR* (*N.* 28.) toſto ſi vede che la forza *MS* ſi eliderà contro il piano, ſola reſtando la *SR* oſſia *MO*, la quale avendo una direzione parallela al piano e partenteſi dal centro, farà ſcorrere la ſfera con moto unicamente progreſſivo al lungo di eſſo piano.

SCOLIO.

115. La cauſa poi, per cui ſopra un piano ſi vede diſcendere una ſfera, rotolandoſi ed avvolgendoſi intorno al proprio aſſe, ſi è, perchè le ſcabrezze, in cui s'incontra nel ſuo cammino, le imprimono bene ſpeſſo colla loro riazione

una

una forza, che non paſſa per il ſuo centro di gravità, donde deve naſcerne neceſſariamente il moto di rotazione, come noi in ſeguito dimoſtreremo.

TEOREMA III.

116. La diſceſa dei corpi per i piani inclinati ſi fa per un moto uniformemente accelerato.

DIMOSTRAZIONE. La gravità, con cui un corpo diſcende per un piano inclinato, è eſpreſſa coſtantemente per $\frac{GA}{L}$ (*N.* 97.), e agiſce in oltre di continuo e ſecondo la ſteſſa direzione ſul mobile al piano ſovrappoſto (*N.* 73.). Ma ſe un mobile è ſpinto al moto da una forza che agiſca egualmente e di continuo, e ſecondo la ſteſſa direzione ſi ha il moto uniformemente accelerato (*N.* 74.). Dunque ſe un corpo diſcenderà per un piano inclinato, uniforme ſarà l'accelerazione del ſuo moto, oſſia concepiraſſi da eſſo il moto uniformemente accelerato.

COROLLARIO I.

117. Denominandoſi quindi F ed f le forze acceleratrici dipendenti dalle gravità relative dei corpi poſti ſui piani inclinati, P e p le aſſolute forze acceleratrici, ritenute le ſuperiori denominazioni, ſi avrà $F : f :: \frac{AP}{L} : \frac{ap}{l}$. Poichè le forze acceleratrici dipendenti o prodotte dalla gravità aſſoluta o relativa, debbono eſſere proporzionali all' azione della gravità medeſima, come effetti a cauſe agenti. Nella formola adunque generale $R : r :: \frac{AG}{L} : \frac{ag}{l}$, in luogo di G e g

esprimenti le gravità assolute, si potranno sostituire P e p, che ci dinotino le forze acceleratrici da esse assolute gravità provenienti, e sarà quindi $R : r :: \frac{AP}{L} : \frac{ap}{l}$. Siccome poi le forze acceleratrici dei gravi, prodotte dalle gravità relative, sono proporzionali alle stesse rispettive gravità, per la ragione sopra accennata, in luogo di R e di r, si potranno sostituire le quantità F ed f, e si avrà $F : f :: \frac{AP}{L} : \frac{ap}{l}$.

COROLLARIO II.

118. Tutte le formole quindi stabilite nel Capo del moto uniformemente accelerato (*N.* 83; 84; 85.), saranno pure proprie del moto de' corpi nella discesa per i piani inclinati, il quale si è pure uniformemente accelerato (*N.* 116.), quando però, in luogo delle assolute forze acceleratrici, si sostituiscano le espressioni delle forze relative, il che fatto, si avranno le sei seguenti analogie.

I. $V : v :: \frac{APT}{L} : \frac{apt}{l}$

II. $V : v :: \sqrt{\frac{APS}{L}} : \sqrt{\frac{aps}{l}}$

III. $S : s :: \frac{APT^2}{L} : \frac{apt^2}{l}$

IV. $S : s :: \frac{V^2 L}{AP} : \frac{v^2 l}{ap}$

V. $T : t :: \frac{VL}{AP} : \frac{vl}{ap}$

VI. $T : t :: \sqrt{\frac{LS}{AP}} : \sqrt{\frac{ls}{ap}}$

Poichè primieramente (*N.* 83; 86.) si hanno le due formole $V : v :: GT : gt$; ed $V : v :: \sqrt{GS} : \sqrt{gs}$. Sostituiti quindi in luogo di G e di g i valori, ovvero le espressioni delle forze acceleratrici provenienti dalle gravità relative, come sopra si è trovato (*N.* 117.), si avranno le prime due, cioè

I. $V : v :: \frac{APT}{L} : \frac{apt}{l}$

II. $V : v :: \sqrt{\frac{APS}{L}} : \sqrt{\frac{aps}{l}}$

Si sono pure stabilite (*N.* 85; 86.) le due formole seguen. $S : s :: GT^2 : gt^2$; ed $S : s :: \frac{V^2}{G} : \frac{v^2}{g}$. Fatta quindi in luogo di G e di g la stessa sostituzione come sopra, ne risulteranno le altre due analogie.

III. $S : s :: \frac{APT^2}{L} : \frac{apt^2}{l}$ IV. $S : s :: \frac{V^2 L}{AP} : \frac{v^2 l}{ap}$.

Per riguardo ai tempi si hanno (*N.* 84; 86.) le proporzioni che seguono $T : t :: \frac{V}{G} : \frac{v}{g}$; $T : t :: \sqrt{\frac{S}{G}} : \sqrt{\frac{s}{g}}$.

Introdotte adunque le convenienti sostituzioni, come superiormente si è fatto, si avranno ancora le ultime due proposte analogie, cioè

V. $T : t :: \frac{VL}{AP} : \frac{vl}{ap}$

VI. $T : t :: \sqrt{\frac{SL}{AP}} : \sqrt{\frac{sl}{ap}}$

COROLLARIO III.

119. Se poi le assolute forze acceleratrici saranno eguali, come avviene nei corpi terrestri, nei quali la gravità è pro-

porzionale alla quantità della materia, si potranno escludere dalle analogie superiori gli equemoltiplici P e p, e ridotte a maggiore semplicità, saranno le seguenti.

I. $V : v :: \frac{AT}{L} : \frac{at}{l}$

II. $V : v :: \sqrt{\frac{AS}{L}} : \sqrt{\frac{as}{l}}$

III. $S : s :: AT^2l : at^2L$

IV. $S : s :: \frac{IV^2}{A} : \frac{lv^2}{a}$

V. $T : t :: \frac{IV}{A} : \frac{lv}{a}$

VI. $T : t :: \sqrt{\frac{SL}{A}} : \sqrt{\frac{sl}{a}}$

COROLLARIO IV.

120. L'analisi delle formole stabilite ci potrà di leggieri somministrare i Teoremi, che risguardano i movimenti uniformemente accelerati de' corpi, che discendono per i piani inclinati. Basterà quivi dedurne alcuni, a motivo d'esempio, dalla sesta analogia risguardante i tempi, i quali si potranno ancora di leggieri verificare con facili esperienze. Primieramente se gli spazj saranno in ragione composta diretta delle altezze, e reciproca delle lunghezze dei piani, i tempi delle discese saranno eguali. La prova ne è manifesta, poichè per Ipotesi si avrà $S : s :: Al : aL$, ossia $aSL = Asl$, ovvero $\frac{sl}{a} = \frac{SL}{A}$. Ma dalla formola VI. (*N. preced.*) si ha il rapporto $T : t :: \sqrt{\frac{SL}{A}} : \sqrt{\frac{sl}{a}}$, ossia $T^2 : t^2 :: \frac{SL}{A} : \frac{sl}{a}$.

Adunque essendo $\frac{SL}{A} = \frac{sl}{a}$, sarà ancora $T^2 = t^2$, e $T = t$, cioè i tempi delle cadute saranno in tale supposizione eguali.

II. Se i piani saranno egualmente alti, e gli spazj in ragione reciproca delle lunghezze, i tempi delle cadute per essi piani saranno pure eguali. Poichè presa la superiore analogia VI. $T^2 : t^2 :: \frac{SL}{A} : \frac{sl}{a}$, e supposte le altezze eguali, cioè $A = a$, sarà pure $T^2 : t^2 :: SL : sl$. Se adunque avrassi $S : s :: l : L$ giusta la condizione data, ossia $SL = sl$, semplificando la prima formola risulterà $T^2 : t^2 :: 1 : 1$; ovvero sarà $T^2 = t^2$, e $T = t$, cioè i tempi delle cadute dovranno essere eguali.

III. Se le altezze dei piani saranno come le lunghezze, ossia se i piani saranno simili, i tempi saranno come le radici degli spazj, e perciò eguali spazj si percorreranno in eguali tempi. Poichè per Ipotesi si ha $L : l :: A : a$, e perciò $La = lA$, ossia $\frac{L}{A} = \frac{l}{a}$. Presa adunque l'analogia VI. $T^2 : t^2 :: \frac{LS}{A} : \frac{ls}{a}$, si potranno in essa trascurare le eguali quantità $\frac{L}{A}$ ed $\frac{l}{a}$, e rimarrà la proporzione $T^2 : t^2 :: S : s$, ossia $T : t :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$. Presi adunque eguali spazj nella sopraddetta Ipotesi, sarà $\sqrt{S} = \sqrt{s}$, e perciò $T = t$; cioè i tempi delle discese saranno eguali.

IV. Se le lunghezze dei piani, ossiano gli spazj da percorrersi saranno proporzionali alle radici delle altezze, tali lunghezze saranno percorse in tempi eguali. Poichè se nella superiore analogia VI. $T : t :: \sqrt{\frac{SL}{A}} : \sqrt{\frac{sl}{a}}$ in vece

delle quantità S ed s si sostituiranno i valori L ed l, ossia le lunghezze, che si assumono quivi al luogo degli spazj percorsi, si avrà $T^2 : t^2 :: \sqrt{\frac{L^2}{A}} : \sqrt{\frac{l^2}{a}}$, ovvero $T^2 : t^2 :: L\sqrt{a} : l\sqrt{A}$. Ma per Ipotesi sta $L : l :: \sqrt{A} : \sqrt{a}$, e quindi $L\sqrt{a} = l\sqrt{A}$. Dunque sarà pure $T = t$, cioè i tempi della discesa saranno pure in tale caso eguali.

SCOLIO.

121. Volendosi comprovare colla esperienza i Teoremi sopra dimostrati risguardanti le discese dei corpi per i piani inclinati, si dovranno disporre due piani di una sufficiente lunghezza, per modo che possano ricevere tutte le divisioni in braccia ed oncie, ovvero in piedi e in pollici, che ci possono occorrere nelle mentovate proporzioni, al qual uopo sarà util cosa che le lunghezze di questi due piani siano, a cagion d'esempio, l'una di 12 e l'altra di 9 braccia o piedi, potendo queste bastare alla osservazione sensibile degli esperimenti, ed essendo numeri opportuni per le relazioni e rapporti, che si hanno a fare. Questi piani dovranno esser fatti a forma di canaletti, affinchè possano scorrere di seguito in essi due sfere metalliche ben levigate, le quali si useranno per gli esperimenti. I suddetti piani si dovranno sostenere a diversi angoli per mezzo di una colonnetta di legno perpendicolare all' Orizzonte, divisa pure allo stesso modo dei piani in piedi e pollici, i quali noteranno le successive altezze, a cui verranno posti i piani, quando la caduta delle sfere cominci a fianco di essa colonnetta. Utile cosa sarà ancora per il paragone esatto delle cadute, che al luogo

dei piani, dove si vogliono rilasciare le sfere, si pongano due laminette di ferro guidate da due fili, le quali trattengano il moto delle sfere, e che si possano di leggieri rialzare coll' uso dei detti fili per lasciare contemporaneamente libero l'adito ai globi metallici per discendere. Per conoscere poi più facilmente i tempi che impiegheranno i suddetti corpi nel discendere per gli assegnati spazj sui piani, sarà bene porre all' estremo dei piani, o al luogo ove si sarà fissato il termine della caduta un ostacolo di legno mobile a piacere, perchè la stessa percossa c' indicherà l'uguaglianza, o la disuguaglianza dei tempi delle cadute. Con tale apparecchio e colla norma di un Orologio, che indichi i secondi, potranno i suddetti esperimenti riuscire facili e dilettevoli, e si troveranno conformi alla Teoria di sopra stabilita.

TEOREMA IV.

122. Le cadute dei corpi per piani inclinati, che siano corde dello stesso cerchio, tirate dalla sommità del diametro perpendicolare all' Orizzonte, si compiranno in egual tempo.

DIMOSTRAZIONE. Sia la retta *AB* perpendicolare sopra l'Orizzontale *BC* (*Fig.* 48.), e dallo stesso punto *A* siano tirate le *AD* ed *AC* inclinate a qualsivoglia angolo coll' Orizzonte. La gravità relativa, con cui scenderà un corpo da *A* per il piano inclinato *AC*, sarà all' assoluta, con cui cadrebbe perpendicolarmente, come *AB* : *AC* (*N.* 97.), e nella stessa ragione saranno pure ad ogni istante le velocità, che da esse forze agenti di continuo ed egualmente dipendono. (*Ass.* V.). Condotta poi la *BF* normale ad *AC*, essendo simili i due triangoli *ABF* ed *ABC*, sarà *AB* : *AC* :: *AF* : *AB*.

Le velocità quindi di due corpi, l'un de' quali ſcenda a perpendicolo da *A*, e l'altro ſcorra per il piano inclinato *AC*, ſaranno ancora in ragione di *AF* : *AB*. Ma il moto ſi può conſiderare ad ogni iſtante come equabile. Dunque anche gli ſpazj percorſi dai due corpi in ciaſcun iſtante ſaranno nella ragione di *AF* : *AB* (*N.* 2.), e preſa la ſomma di tutti gli iſtanti, mentre un corpo ſcorrerà tutta la *AF*, percorrerà l'altro nello ſteſſo finito tempo tutta la normale *AB*. Similmente tirata da *B* la *BE* normale all'altro piano *AD*, ſi proverà che gli ſpazj *AB* ed *AE* ſaranno traſcorſi in egual tempo da una ſfera poſta ſul piano inclinato *AD*, e da un'altra cadente liberamente dal punto *A*. Nello ſteſſo tempo adunque, in cui ſarà percorſa la normale *AB* da un corpo liberamente cadente, ſi percorreranno da due corpi ſituati ſui piani inclinati *AC* ed *AD* le porzioni *AF* ed *AE* di eſſi. Adunque gli ſpazj *AE* ed *AF* ſi traſcorreranno in egual tempo. Ma eſſendo retti i due angoli *AEB* ed *AFB*, ed avendo i due triangoli *AEB* ed *AFB* la ſteſſa baſe *AB*, potrà un cerchio paſſare per i quattro punti *A*, *B*, *E*, *F*, e perciò le due porzioni de' piani *AE* ed *AF* ſaranno corde dello ſteſſo cerchio. Dunque le cadute dei corpi per piani inclinati, che ſiano corde dello ſteſſo cerchio, tirate dagli eſtremi di un diametro, ſi percorreranno in egual tempo.

COROLLARIO.

123. Le corde ancora inferiori *BE* e *BF* tirate dallo ſteſſo punto *B* del diametro in uno ſteſſo cerchio (*Fig.* 48.), e generalmente ancora le parti ad eſſe corde proporzionali verranno percorſe in eguali tempi. Imperocchè s'intenda ro-

ve-

veſciata la figura, e ſuppongaſi cadere l'un corpo a perpendicolo da *B* verſo *A*, e le sfere poſte ſui piani da *B* verſo *E*, e da *B* verſo *F*. Le due corde *BE* e *BF* ſaranno percorſe dai mobili nello ſteſſo tempo, in cui un corpo ſcenderà per l'intiero diametro *AB*, e però le cadute dei corpi per eſſe corde ſaranno iſocrone (*N. preced.*). Ma l'altezza e la lunghezza dei piani nelle due corde circolari, punto non ſi altera, cadendo ancora i corpi da *E* e da *F* verſo *B*. Dunque anche nella primiera poſizione ſuccederà in egual tempo la caduta dei corpi per le dette corde inferiori *BE* e *BF*, oſſia iſocrone ſaranno le diſceſe dei corpi per eſſe. Per riguardo poi alle parti proporzionali, ſiano due cerchj in contatto nel punto *A*, e ſia *AC* (*Fig.* 50.) diametro del minor cerchio, *AB* dell' altro. Partendo dallo ſteſſo punto del diametro le corde *AC*, *AO*, *AR*, *AV*, ſaranno tutte queſte percorſe in egual tempo, per il Teorema precedente, ed eſſendo le ſteſſe rette prolungate in *B*, *S*, *P* ed *N* per modo che formano le corde *AB*, *AS*, *AP* ed *AN* nel maggior cerchio, ſi avranno ancora ſopra queſte le diſceſe dei corpi iſocrone. Sottraendoſi adunque le prime dalle ſeconde, ſaranno pure in egual tempo traſcorſe le porzioni, ovvero le differenze *CB*, *SO*, *PR*, *NV*. Ma queſte ſono proporzionali alle corde *AB*, *AS* ec. come dai triangoli ſimili *ABS*, *AOC* facilmente appariſce. Dunque queſte porzioni proporzionali alle corde date dei cerchj ſaranno in eguali tempi traſcorſe, e potendoſi ciò dimoſtrare in tutti gli altri conſimili caſi, ſi potrà generalmente ſtabilire che le parti proporzionali delle corde di un cerchio tirate dagli eſtremi di uno ſteſſo diametro, ſaranno in tempo eguale percorſe.

TEOREMA V.

124. Se allo ſteſſo punto *B* dell' Orizzonte da un muro verticale *EZ* s'inclineranno ſucceſſivamente diverſi piani; ſarà percorſo più velocemente di tutti quello che farà un angolo ſemiretto coll' Orizzonte (*Fig.* 51.).

DIMOSTRAZIONE. Sia *EB* il piano Orizzontale, e dal punto *B* venga alzata la normale *BA* doppia di *BE*, e ſopra di eſſa *AB* come diametro ſi formi il ſemicerchio *ASB*, che verrà a toccare *EZ* in qualche punto *V*. Quindi dal centro ſi tiri una *CV* parallela ad *EB* che compirà il quadrato *EC*, e da *V* ſi abbaſſi la diagonale *VB*, la quale formerà un angolo ſemiretto coll' Orizzonte. Conducanſi quindi le corde *BS*, *BV*, *Bn*, *Br* prolungandole quanto è duopo, perchè giungano a toccare l'ortogonale *ZE*. Ciò fatto, manifeſta coſa è che tutte le inferiori corde *BS*, *BV*, *Bn*, *Br* dovranno eſſere ſcorſe in egual tempo (*N.* 123.). Ma eccettuatane la *VB*, che parte dal punto *V* di contatto, tutte le altre corde ſi devono prolungare, perchè giungano a toccare la ſteſſa *ZE*. Dunque di tutt' i piani che dal muro verticale *EZ* vanno a terminare in *B*, più velocemente di tutti verrà percorſo *BV*, che forma un angolo ſemiretto coll' Orizzonte, dovendoſi queſto percorrere nello ſteſſo tempo, in cui ſi percorre una porzione ſoltanto degli altri piani. Dunque ſe allo ſteſſo punto *B* dell' Orizzonte s'incline-ranno ec.

TEOREMA VI.

125. Un grave cadendo da uno ſteſſo punto *A*, o ver-

ticalmente, o per piani inclinati, giunto che ſia alla ſteſſa linea Orizzontale, avrà acquiſtato la ſteſſa ſomma di velocità.

DIMOSTRAZIONE. Dal punto *A* ſi tirino all' Orizzontale *CE* le due rette *AC* ed *AE* (*Fig.* 52.), che figurano due piani comunque inclinati, e dallo ſteſſo punto *A* ſia abbaſſata la verticale *AB*, e ſi tiri la *BD* normale ad *AC*; ſarà *AD* lo ſpazio percorſo dal mobile nello ſteſſo tempo, in cui cadendo lo ſteſſo grave liberamente ed a perpendicolo, ſcorrerebbe la verticale *AB* (*N.* 122.). Quindi ſarà la velocità acquiſtata in *B* alla velocità, che avrà il mobile giunto in *D*, come l'aſſoluta gravità del corpo alla relativa, che agiſce ſul piano (*Aſs.* V.), oſſia come *AC* : *AB* (*N.*97.). Siccome poi il moto d'un corpo ſul piano *AC*, e per tutto lo ſpazio *AB* è uniformemente accelerato, le velocità delle cadute ſaranno pure tra loro come $\sqrt{AB} : \sqrt{AD}$ (*N.*77.), e varrà l'analogia $\sqrt{AB} : \sqrt{AD} :: AC : AB$. Ma per i triangoli ſimili *DAB* e *CAB* ſi ha *AC* : *AB* :: *AB* : *AD*, e quindi $\sqrt{AC} : \sqrt{AD} :: AC : AB$. Adunque tanto la velocità di un corpo, che cade verticalmente per *AB*, quanto quella acquiſtata dallo ſteſſo corpo nel cadere per tutto il piano *AC* hanno la ſteſſa proporzione colla velocità, che acquiſta il mobile cadendo per lo ſpazio *AD* ſul piano, e però ſono eguali tra loro. Lo ſteſſo principio ſi può applicare al piano *AE*, ed a qualunque altro. Adunque ſarà generalmente vero che un mobile, che cade comunque da un dato punto *A*, giunto alla ſteſſa linea Orizzontale, avrà acquiſtato la ſteſſa ſomma di velocità.

TEOREMA VII.

126. Volendoſi paragonare il movimento dei corpi ſui

piani inclinati colla diſceſa perpendicolare dei medeſimi, ſi potranno di leggieri ſtabilire altre formole, e dinotando gli elementi del moto libero e verticale prodotto dalla aſſoluta gravità colle lettere grandi, e colle minori eſprimendo gli elementi del moto per i piani inclinati, ſi avranno le ſei ſeguenti analogie.

I. $V : v :: t : \frac{at}{l}$ II. $V : v :: \sqrt{S} : \sqrt{\frac{as}{l}}$

III. $S : s :: T^2 : \frac{at^2}{l}$ IV. $S : s :: V^2 : \frac{v^2 l}{a}$

V. $T : t :: V : \frac{vl}{a}$ VI. $T : t :: \sqrt{S} : \sqrt{\frac{ls}{a}}$.

Dimostrazione. Nel moto uniformemente accelerato dei corpi, che cadono liberamente ed a perpendicolo, ſi è ſtabilita ſuperiormente l'analogia $V : v :: T : t$. (*N.* 72.). Nel moto poi colla ſteſſa legge accelerato dei corpi, che ſcendono per i piani inclinati, ſi è coſtrutta l'analogia $V : v :: \frac{AT}{L} : \frac{at}{l}$. (*N.* 119.). Sarà dunque nel primo caſo $V = T$, e nel ſecondo $v = \frac{at}{l}$; e quindi avraſſi l'analogia

I. $V : v :: T : \frac{at}{l}$. Per il moto verticale accelerato ſi è trovato (*N.* 77.) $V = \sqrt{S}$, e per il moto accelerato ſui piani $v = \sqrt{\frac{as}{l}}$ (*N.* 119.). Si avrà dunque, unendo inſieme i rapporti, l'analogia ſuperiormente enunciata

II. $V : v :: \sqrt{S} : \sqrt{\frac{as}{l}}$. Dal *N.* 85. per il moto, e

diſceſa perpendicolare de' corpi, ſi ha $S = GT^2$, oſſia $S = T^2$ (*N.* 76.), potendoſi ſupporre le forze acceleratrici eguali nei corpi terreſtri (*N.* 73.). Per il moto de' corpi ſui piani ſi è trovato $s = \frac{at^2}{l}$ (*N.*119). Adunque ſi potrà coſtruire la formola

III. $S : s :: T^2 : \frac{at^2}{l}$. Si è pure ſtabilito per il moto libero, e uniformemente accelerato eſſere il rapporto degli ſpazj alle velocità :: $S : \frac{V^2}{G}$ (*N.* 86.), oſſia come $S : V^2$ per la ragione teſtè mentovata. Per lo ſteſſo moto ſui piani inclinati ſi ha (*N.* 119.) $s = \frac{v^2 l}{a}$. Avraſſi adunque

IV. $S : s :: V^2 : \frac{v^2 l}{a}$. Per il rapporto de' tempi agli ſpazj ed agli elementi, che coſtituiſcono i piani nel moto uniformemente accelerato ſui piani, ſi ha il rapporto $t = \frac{lv}{a}$ (*N.* 119.). Per lo ſteſſo moto con legge uniforme accelerato, ma libero e verticale all' Orizzonte, ſi ha $T = V$ (*N.*72.). Adunque ſi potrà ſtabilire la proporzione che ſegue

V. $T : t :: V : \frac{vl}{a}$. Finalmente per il moto uniformemente accelerato ſu d'un piano qualunque inclinato all' Orizzonte, ſi è dimoſtrato eſſere $t = \sqrt{\frac{sl}{a}}$ (*N.*119.), e per lo ſteſſo moto, ma libero e perpendicolare all' Orizzonte, ſi è trovato eſſere $T = \sqrt{S}$ (*N.*77.). Adunque potraſſi ſtabilire l'ultima delle accennate formole, cioè

VI. $T : t :: \sqrt{S} : \sqrt{\frac{sl}{a}}$.

COROLLARIO I.

127. Se lo ſpazio quindi da percorrerſi da un grave nella diſceſa perpendicolare, ſarà allo ſpazio da percorrerſi nella diſceſa per un piano inclinato, come la lunghezza del piano all' altezza, i tempi, in cui ſaranno percorſi i detti ſpazj ſaranno eguali. Imperocchè per l'analogia VI. ſi ha $T : t :: \sqrt{S} : \sqrt{\frac{sl}{a}}$, oſſia $T^2 : t^2 :: S : \frac{sl}{a}$, ovvero $T^2 : t^2 :: Sa : sl$; ma per Ipoteſi $S : s :: l : a$, e quindi $Sa = sl$. Dunque ſarà ancora $T^2 = t^2$, oſſia $T = t$.

COROLLARIO II.

128. Se lo ſpazio verticale, per cui dovrà cadere un corpo ſarà una terza proporzionale dopo l'altezza, e la lunghezza intiera di un piano, per cui ſcorrer deve un altro corpo, le cadute dei due mobili ſi compiranno in egual tempo. Poichè preſa la ſuperiore analogia VI. (*N.* 126.), e quadrati tutt' i ſuoi termini, ſi ha $T^2 : t^2 :: S : \frac{sl}{a}$; ſiccome poi lo ſpazio che deve percorrerſi ſul piano ſi è la ſteſſa lunghezza totale di eſſo piano, ſarà ancora $T^2 : t^2 :: S : \frac{l^2}{a}$, oſſia $T^2 : t^2 :: Sa : l^2$. Ma per Ipoteſi dev' eſſere $S : l :: l : a$, oſſia $Sa = l^2$. Dunque in tale Ipoteſi ſarà ancora $T^2 = t^2$, oſſia le cadute dei due corpi ſi compiranno in egual tempo al perpendicolo, e ſul dato piano.

COROLLARIO III.

129. Si fa quindi ancora manifeſto, che un corpo diſcenderà per un piano inclinato che ſia corda d'un cerchio nello ſteſſo tempo (*Fig.* 48.), in cui cadendo perpendicolarmente, ſcorrerebbe tutto il diametro di eſſo cerchio. Poichè per proprietà del cerchio ſi fa eſſere $\overline{AE}^2 = BA \cdot AP$, e riſolvendo ſi ha $AP : AE :: AE : AB$. Dunque AB è una terza proporzionale dopo AP ed AE, oſſia dopo l'altezza e la lunghezza del piano, e quindi iſocrone dovranno eſſere (*N.* 128.), le cadute dei corpi per tutta la AB diametro del cerchio, e per l'intiero piano AE corda dello ſteſſo cerchio.

SCOLIO.

130. Le verità Teoretiche ſopra dimoſtrate riſguardanti il paragone del moto nei corpi, che cadono verticalmente, e in quelli, che diſcendono per i piani inclinati, ſi potranno comprovare di leggieri colla eſperienza. Ciò però che dovrà oſſervarſi diligentemente ſi è che la caduta dei corpi verticalmente e ſui piani ſi cominci preciſamente allo ſteſſo tempo, per lo che gioverà moltiſſimo che il corpo, che deve cadere a perpendicolo, ſia rilaſciato da uno ſtromento fatto a modo di compaſſo ſferico, che ſi poſſa di repente aprire col mezzo di un filo ben teſo per laſciar libera la caduta di eſſo preciſamente nel tempo, in cui ſi rilaſcia con ſimile meccaniſmo la ſfera ſul piano.

TEOREMA VIII.

131. Se le assolute forze acceleratrici saranno diverse per ragione della diversa gravità nelle varie sensibili distanze dal centro della terra, si avranno le forze totali, ossia le assolute quantità di moto sui piani espresse nelle due seguenti analogie.

I. $F : f :: \frac{MTAP}{L} : \frac{mtap}{l}$

II. $F : f :: M\sqrt{\frac{ASP}{L}} : m\sqrt{\frac{asp}{l}}$.

DIMOSTRAZIONE. Per i corpi, che discendono per i piani inclinati, supposte le assolute forze acceleratrici diverse, si sono stabilite superiormente (*N.* 118.) le formole seguenti risguardanti le velocità, cioè $V : v :: \frac{APT}{L} : \frac{apt}{l}$, ed $V : v :: \sqrt{\frac{APS}{L}} : \sqrt{\frac{aps}{l}}$. Presa adunque la formola ecumenica delle intiere quantità di moto, o forze totali altrove stabilita (*N.* 9.), cioè $F : f :: MV : mv$, e introdotti i valori analoghi ricavati dalla prima proporzione, si avrà primieramente

$F : f :: \frac{MAPT}{L} : \frac{mapt}{l}$. Surrogati poi nella stessa formola delle forze totali i valori relativi di V e di v ricavati dalla seconda analogia, si avrà la seconda delle formole proposte, cioè

$F : f :: M\sqrt{\frac{APS}{L}} : m\sqrt{\frac{aps}{l}}$.

COROLLARIO.

132. Assumendosi poi le assolute forze acceleratrici eguali, si potranno dalle due formole superiori tagliare le quantità P e p, che in tal caso saranno la funzione di equemoltiplici, e le stesse analogie ridotte a maggior semplicità saranno le seguenti.

I. $F : f :: MTA : mta$.

II. $F : f :: M\sqrt{\frac{AS}{L}} : m\sqrt{\frac{as}{l}}$.

TEOREMA IX.

133. Le formole risguardanti le forze totali nel moto uniformemente accelerato sui piani inclinati per rapporto al verticale saranno le seguenti.

I. $F : f :: M\sqrt{S} : m\sqrt{\frac{as}{l}}$; II. $F : f :: MT : \frac{mta}{l}$;

Dimostrazione. Il rapporto delle velocità tra i corpi che cadono verticalmente, e quelli che scendono al lungo dei piani inclinati, si è stabilito (*N.* 125.) nelle due seguenti analogie $V : v :: \sqrt{S} : \sqrt{\frac{as}{l}}$; ed $V : v :: T : \frac{at}{l}$ nella Ipotesi delle forze acceleratrici eguali. Presa adunque la generale formola od analogia per le intiere quantità di moto, o forze totali stabilita a principio (*N.* 9.), cioè $F : f :: MV : mv$, e surrogate le espressioni di V e di v ricavate dalle due mentovate analogie, si avranno, come

è chiaro a vederſi le due ſeguenti proporzioni, cioè $F : f : : M\sqrt{S} : \sqrt[m]{\frac{as}{l}}$, ed $F : f :: MT : \frac{mta}{l}$.

SCOLIO.

134. Per mezzo poi di tali formole generali ſi potranno di leggieri paragonare le quantità di moto nei corpi, che ſcendono al lungo de' piani inclinati, e di que' che cadono verticalmente, e riferirle alle maſſe, all' altezza e lunghezza dei piani, ed anche ai tempi, e ſi potranno con facilità ſciogliere tutt' i Problemi, che da tali elementi poſſono riſultare.

CAPO OTTAVO.

DELL' ATTRITO.

TEOREMA I.

135. SE le ſuperficie di un mobile e di un piano, ſu cui ſi muove, ſaranno aſpre e ſcabre, ne naſcerà un attrito di parti, e quindi una eliſione di moto.

DIMOSTRAZIONE. Un corpo per una forza ſemplice ſi muove in quella retta, per cui è ſpinto (*Aſs.* II.), e animato da più forze impreſſe per altrettante direzioni, deve ancora ſeguire una retta determinata dalla diagonale di un dato parallelogrammo (*N.* 36.). Ma le ſcabrezze irregolari di un piano, ſopra cui deve proſeguire il ſuo moto, impediſcono, e reſiſtono in tutt' i ſenſi, che il mobile proſegua per la ſteſſa retta di prima. Per vincere adunque

o in parte, o del tutto queſta reſiſtenza, e ſecondare il ſuo moto, perderà il mobile una quantità di forza, oſſia ſi eliderà in parte il ſuo moto. Adunque ſe la ſuperficie di un mobile ec.

COROLLARIO I.

136. Quanto più le ſcabrezze de' corpi e de' piani, ſu cui ſi devono muovere, ſaranno maggiori e più ſode, maggiore ancora ſarà l'attrito e la perdita del moto. Poichè creſcendo la reſiſtenza, che oppongono le ſcabrezze per ragione, o della grandezza, che ne moltiplica le parti, o della durezza, che le rende più ſode, creſcerà ancora la riazione contro de' gravi moſſi, e maggiore quindi nel conflitto ne riſulterà la eliſione del moto.

COROLLARIO II.

137. Quindi ancora quanto un corpo ſarà più peſante e voluminoſo, ovvero poſto egual volume, e ritenuta la ſteſſa maſſa, quanto ſarà più velocemente ſpinto al moto, l'attrito ſarà ancora maggiore, poſte l'altre coſe d'altronde pari. Imperocchè quanto il grave è di maggior volume, maggiori in numero incontra le ſcabrezze ſul piano, e quanto è più peſante, creſce la difficoltà di ſuperare e ſopravvanzare le ſcabrezze, di cui abbondano i piani, anzi dovendo i piani ſteſſi compreſſi cedere, ſiccome elaſtici, per ragione del peſo maggiore, che attualmente gli comprime, ſi aumenteranno ancora le prominenze all' intorno del mobile, e nell' urto con eſſe creſcerà nella ſteſſa proporzione l'attrito, e la perdita quindi del moto. Quanto poi un corpo rite-

nendo eguale maſſa e volume, ſarà più velocemente ſpinto al moto, con tanto maggiore impeto urterà nelle ſcabrezze oppoſte al ſuo retto cammino, e riſentirà quindi una reſiſtenza maggiore proporzionale alla maggiore percoſſa. Adunque ec.

COROLLARIO III.

138. Se il mobile ſarà tirato, o ſpinto al moto con una direzione obbliqua al piano, poſte le altre coſe pari, l'attrito accreſceraſſi, ſe la direzione della forza impreſſa coſpirerà colla direzione della gravità, e ſcemeraſſi nel caſo che ad eſſa ſi opponga. Poichè nel primo caſo venendo ſpinto un mobile obbliquamente ſopra di un piano, ſe ſi riſolverà la forza del mobile (*Fig.* 50.), eſpreſſa per *AC* nelle due *BA* e *BC* (*N.* 28.), ſi troverà che parte di eſſa s'impiegherà nel premere perpendicolarmente il piano, il quale dovrà comprimerſi cedendo per la propria elaſticità; quindi ſi accreſceranno le prominenze oppoſte al moto del corpo, ed eſerciteranno queſte ancora una maggior reſiſtenza, poichè la forza, che le urterà dirimpetto, tenterà piuttoſto di farle compenetrare col piano di quello ſia di compianarle. Siccome poi la forza totale a quella che ſi eſercita contro al piano ſta come il raggio *AC* al ſeno retto *BA*, come dalla accennata riſoluzione facilmente appariſce; quindi quanto ſarà maggiore l'angolo d' incidenza, che allontana il moto del corpo dal paralleliſmo del piano, tanta maggior forza s'impiegherà contro al piano, e maggiore a proporzione faraſſi la eliſione del moto. Se poi la direzione della forza, con cui il mobile è tirato, o ſpinto a muoverſi ſu d' un piano, ſi opporrà a quella della gravità, il peſo del corpo ſul

piano ſi renderà minore, e ſminuiraſſi l'attrito (*N.* 137.), e la perdita quindi del moto.

TEOREMA II.

139. L'attrito è ſempre minore quando rotola, o s'avvolge un corpo ſu d'un piano, che quando ſi muove radendolo.

DIMOSTRAZIONE. Allor quando un corpo avvolgendoſi intorno a ſe ſteſſo ſcorre ſu d'un piano, non ha che a ſuperare ſolamente parte delle ſcabrezze del piano, ſu cui ſi muove, nè le deve infrangere gran fatto, poichè o in rimontandole le ſorpaſſa, o le ſue prominenze penetrano nelle cavità del piano, e viceverſa, ed il mobile ne ſoffre quindi una reſiſtenza non molto ſenſibile. All' oppoſto quando un corpo ſcorre ſu d'un piano radendolo, tutte incontra dirimpetto, e abbattere deve le ſcabrezze di eſſo per avanzarſi col ſuo rettilineo moto, e quindi maggiore (*N.* 135.) eſſer deve l'attrito, e la eliſione del moto. L'eſperienza ſteſſa ne aſſicura di queſto principio, poichè in fatti i corpi cilindrici più facilmente muovonſi che non i piani, i quali non poſſono sì facilmente per la loro figura ravvolgerſi e rotolarſi, e quindi è pure che ai corpi piani ſi procura di agevolare il moto col ſottoporre ad eſſi dei corpi cilindrici.

SCOLIO.

140. Qualche ſorta di attrito e qualche diſpendio di moto ſi ha poi ſempre ogni qual volta un corpo poſto in moto ſi trova in contatto con altri fermi, o privi di egual moto,

non potendoſi mai trovare, o ridurre la materia ad eſſere così piana, quale noi ce la immaginiamo in mente con idea Geometrica, diſcordante però ſempre dalla Fiſica. Queſto attrito delle parti ſolide tra loro ſi è la cagione, per cui allorchè nelle macchine ſi è indotto l' equilibrio tra la potenza e la reſiſtenza, non baſta ogni minimo peſo aggiunto alla potenza, per far sì che reſti ſuperata, e cedente la reſiſtenza; poichè ſpeſſe volte è maggiore la quantità di moto, che ſi perde per l'attrito, che non ſia il picciolo incremento di forza fatto nella potenza per un tenuiſſimo peſo, che ad eſſa ſi ſopraggiunga. Quindi è pure, che nell' uſo delle Taglie l'avantaggio, che ſi può procurare alla forza colla moltiplicità di eſſe, non può eſſere accreſciuto all' infinito, ma ſolo fino ad un certo e determinato limite, poichè moltiplicandoſi le girelle oltre un certo numero, è maggiore la perdita di moto cagionata in eſſe per l'attrito, che l'avantaggio di velocità, che ſi può procurare colle medeſime alla forza movente.

Fine della prima Parte.

DELLA DINAMICA

PARTE SECONDA.

DEL MOTO CURVILINEO.

DEFINIZIONI.

Forze centrali ſi chiamano in generale quelle, che ſpingono i corpi ad accoſtarſi, ovvero ad allontanarſi da un dato punto, il quale diceſi quindi centro delle forze.

Forza centrifuga ſi è quella, per cui un mobile tende a diſcoſtarſi da un dato centro.

Forza centripeta ſi dice quella, da cui è ſpinto un corpo o attirato verſo un determinato centro.

Un grave diceſi *projetto orizzontalmente* quando la linea di direzione della forza impreſſa è parallela all' Orizzonte.

Chiamaſi *projetto perpendicolarmente od obbliquamente* quel grave, in cui la direzione della forza, che gli s'imprime, forma un angolo retto od obbliquo collo ſteſſo Orizzonte.

Angolo di elevazione, o *acclive di un projetto* chiamaſi quello, che vien formato dalla linea di direzione della forza impreſſa, e da una retta Orizzontale tirata dal punto di projezione.

Angolo d'inclinazione, o *declivè* ſi chiama quello, che ſi forma ſotto la ſteſſa Orizzontale dalla linea di direzione della forza impreſſa.

Area percorſa ſi dice quello ſpazio triangolare, che ha per vertice il centro delle forze, e per baſe l'arco di una Curva percorſo in un dato tempo.

Angolo della vera Anomalia diceſi quello, che vien formato in un dato iſtante dalle direzioni della forza impreſſa ad un mobile e dalla forza centripeta di eſſo, poſtochè il corpo muovaſi in un' Eliſſe per una forza centripeta diretta all' uno dei fuochi.

L' angolo poi della Anomalia media ſi chiama quello, che ha lo ſteſſo rapporto a quattro retti, che ha l'area Elittica deſcritta in un dato tempo intorno al fuoco, all' area totale.

Corpo perfettamente duro ſi appella ipoteticamente quello, che non cede a qualunque forza, la quale tenti di cangiare la ſua configurazione.

Corpo perfettamente elaſtico ſi nomina quello, che compreſſo da una qualunque forza, ad eſſa cede cangiando la ſua figura, e riacquiſta toſto la prima forma, ceſſando di agire la forza comprimente.

Centro di oſcillazione ſi è quel punto di un corpo ſoſpeſo, e oſcillante liberamente, in cui, ſe ſi conſidera raccolta la gravità di eſſo ſolido, ſi devono compire ancora le oſcillazioni ad una ad una nello ſteſſo tempo di prima.

Centro di percuſſione è quel punto di un corpo moſſo comunque, in cui imprimendoſi una data forza contraria alla direzione del primo moto, ſi eſtingue in eſſo ogni movimento, e ſi riduce di repente lo ſteſſo ſolido alla quiete.

Aſſe di rotazione ſi è quella retta, che ſi conſidera immobile in un corpo, mentre tutte le altre parti di eſſo ſono traſportate ſucceſſivamente da un moto circolare intorno ad eſſa retta, che congiunge i centri di queſto moto.

SUP-

SUPPOSIZIONI.

I. Che le direzioni dei gravi cadenti ſullo ſteſſo Orizzonte ſiano normali alla ſuperficie di eſſo e parallele tra loro. Una tale propoſizione non è rigoroſamente vera, ma non può produrre giammai un error ſenſibile, quando ſi aſſumano picciole diſtanze ſulla ſuperficie della terra. Poichè ſebbene le direzioni dei gravi cadenti venendo prolungate andrebbero a concorrere nel centro della terra, l'angolo però da eſſe compreſo ſarebbe minimo e da traſcurarſi, poichè avrebbe la ſteſſa proporzione con un retto, che ha il picciol arco della diſtanza delle linee ſulla circonferenza terreſtre ad un quadrante intiero di eſſa.

II. Che ogni, e qualunque Curva ſia compoſta da un infinito numero di lati infiniteſimi, e ſi poſſa conſiderare come un poligono formato da infinito numero di lineette di una menoma e inaſſegnabile grandezza. La tangente quindi di una Curva ſi potrà ſempre conſiderare come un latercolo prolungato del poligono, oſſia della Curva.

ASSIOMI.

I. Le quantità ed i loro rapporti, che ſempre ſi accoſtano all' eguaglianza ſino a riuſcire la loro differenza inaſſegnabile, divengono alla fine eguali. Quindi la corda, la tangente e l'arco in una ſteſſa Curva, nel loro naſcere e ſvanire ſi potranno aſſumere per eguali.

II. Nella colliſione e conflitto di due corpi ſuccedono in eſſi eguali cangiamenti di ſtato; coſicchè nell' urto fatto alla ſteſſa parte quanto di moto perde l'un corpo, tanto ſi acquiſta dall' altro. Nell' incontro poi a parti contrarie ſi elidono eguali quantità di moto.

CAPO NONO.

DEL MOTO CURVILINEO IN GENERE.

TEOREMA I.

141. UN mobile qualunque ſpinto per una data direzione da una forza impreſſagli, e animato da un' altra forza, che abbia un finito rapporto colla prima (*Fig.* 53.), e che agiſca di continuo, e formi colla ſua direzione un qualunque angolo coll' impreſſa, deſcriverà col ſuo moto una Curva.

DIMOSTRAZIONE. Eſprima la retta *AK* la direzione della forza impreſſa al mobile nel punto *A*. Se il mobile non riſentiſſe altra forza, ſcorrerebbe per la direzione *AK*, ſecluſi gli oſtacoli ſino all' infinito (*Aſs.* II. *Part.* I.). Che ſe nello ſteſſo iſtante, in cui comincia a ſcorrere lo ſpazio *AC*, ſi ſupporrà che ſopravvenga al mobile un' altra forza, la quale s'incontri ad angolo colla prima, ed abbia un finito rapporto coll' impreſſa, ritirerà queſta e farà deviare eſſo mobile dalla ſua prima direzione *AK* (*Aſs.* V.). Dinoti quindi l'infiniteſima retta *AB*, lo ſpazio, che ſcorrerebbe il grave cadendo in vigore della ſola forza, che s'impiega a ritirare il corpo dalla direzione *AK*, e ſia *AC* quella porzione infiniteſima di ſpazio, che percorrerebbe il grave nello ſteſſo iſtante, ſe foſſe ſpinto dalla ſola forza impreſſa. Conſiderandoſi poi agenti tutte e due le forze ad angolo congiunte, il mobile percorrerà la diagonale *AD* del parallelogrammo *ABCD* (*N.* 29.), la quale dovendo equivalere ai due lati *AB* ed *AC* infiniteſimi (*N.* 30.), ſarà

pur essa infinitamente picciola. Pervenuto il mobile in *D*, e considerata la sola forza attiva, che distraesse il corpo dalla sua prima direzione, e che esercita ancora la sua energia nel secondo istante, si muoverebbe il corpo per un altro spazio infinitesimo *ED*, e secluso questa forza, proseguirebbe a muoversi per la direzione *AD*, scorrendo il latercolo *DF* = *AC* (*Ass.* II.; VI. *Part.* I.). Congiunte poi le forze, terrà il suo moto per *DH*, trascorrendo nello stesso istante la diagonale del parallelogrammo *EDFH*. Collo stesso discorso si proverà similmente, che nei successivi istanti dovrà il mobile percorrere le infinitesime rette *HP*, *PV*, *VZ* ec., ossia la Curva *AS* da questi infinitesimi lati composta (*Supp.* 2.). Adunque se un mobile qualunque ec.

COROLLARIO.

142. Potendosi il moto considerare ad ogni istante come uniforme, sarà la velocità del mobile nel primo istante proporzionale ad *AD* (*N.* 2.). Per essere poi data nella direzione la forza, che nell' assegnato tempetto ritrae per *AB* il corpo dal suo retto cammino, e determinata pure la direzione *AK* della forza impressa, se dall' estremo della retta *AD* si alzerà una *DC* parallela a *BA*, e prolungherassi finchè tagli la *AC* tangente della Curva in *A*, condotta la *BD*, si avrà compito il parallelogrammo *ABCD*, che indicherà la direzione e l'intensità delle forze componenti. Risolvendosi quindi la diagonale *AD* (*N.* 30.), esprimerà la tangente *AC* la forza impressa di projezione, e perciò lo spazio, che nel primo istante percorrerebbe il mobile, se da questa sola forza venisse animato (*N.* 2.); similmente la retta *AB* ci di-

noterà la forza, che ritira il mobile dalla prima direzione, oſſia lo ſpazio, che percorrerebbe eſſo mobile nel medeſimo iſtante in vigore di queſta forza, ſe non riſentiſſe l'azione di verun' altra. La prima di queſte forze chiamaſi ancora Tangenziale, e la ſeconda Attiva. Da queſte due forze poi inſieme combinate e compoſte avranno tuttora origine le Curve dai corpi deſcritte.

LEMMA I.

143. Dato l'angolo *PRL* infiniteſimo ſe ſi aſſumerà il raggio *RL* infinitamente picciolo, il ſeno *PL* ſarà un infiniteſimo di ſecond' ordine (*Fig.* 54).

DIMOSTRAZIONE. Sulla direzione della linea *RL* ſi prenda il raggio *AR* finito, e con eſſo ſi deſcriva il ſemicerchio *BAD*, e ſi prolunghi *RP* in *B*. Abbaſſando quindi da *A* la normale *AC*, per i triangoli ſimili *ACR*, *PRL*, ſi avrà la proporzione *RA* : *RL* :: *AC* : *LP*; ma *AR* è una quantità finita ed *RL* infiniteſima di primo ordine per Ipoteſi: il ſeno poi *AC*, che miſura un angolo infiniteſimo è deſſo pure infiniteſimo di primo ordine. Adunque dovendovi avere tra *AC* ed *LP* lo ſteſſo rapporto, che tra una quantità finita ed una infinitamente picciola ſarà *LP* un infiniteſimo di ſecond' ordine.

LEMMA II.

144. Dato l'infiniteſimo arco *RN* di una Curva, e alzata da *N* la *NL* normale alla tangente *TR*, ſe ſi condurrà una retta *NT* (*Fig.* 55.) parallela alla direzione della forza

attiva o centripeta eſpreſſa per *RF*, ſarà la intercetta *LT* infinitamente picciola per rapporto ad *LN*, oſſia riuſcirà una infiniteſima di terz' ordine.

DIMOSTRAZIONE. Si prolunghi la retta *LN*, finchè venga a tagliare la *RF* prodotta ſe fia duopo. Per le parallele *RF* ed *NT* ſaranno ſimili i due triangoli *RFL* ed *NTL* e ſarà *LF* : *LR* :: *LN* : *LT*. Ma *LF* è una quantità finita, aſſumendoſi finito il raggio della Curva *RNV*, ed *LR* è una quantità infiniteſima di primo ordine, per eſſere tangente dell' arco *RN* (*Aſs.* I. *Part.* II.); il ſeno poi *LN* è infinitamente picciolo di ſecond' ordine (*N.* 143.). Adunque dovrà eſſere *LT* infinitamente picciola per rapporto a *LN*, oſſia ſarà una quantità infiniteſima di terz' ordine.

TEOREMA II.

145. Lo ſpazio, che percorrerebbe un mobile nel primo iſtante in vigore delle forze attiva e centripeta, ſarà infinitamente minore dello ſpazio, che ſcorrerebbe in vigore della ſola forza tangenziale.

DIMOSTRAZIONE. Il ſeno *LN* (*Fig.* 55.) dell' infiniteſimo angolo *LRN* ſarà infinitamente minore del raggio *NR* (*N.* 143.), oſſia della tangente *LR* (*Aſs.* I. *Part.* II.). Eſſendo poi *LT* una quantità infiniteſima per rapporto ad *LN* (*N.* 144.), ſi potrà confondere *NL* con *NT* ed *RL* con *RT*, e quindi ſarà pure *NT* una quantità infinitamente picciola per rapporto a *TR*. Ma lo ſpazio, che nel primo iſtante paſſerebbe il mobile in vigore della forza attiva, che ritrae il corpo dalla prima direzione è eſpreſſo da *RP* (*N.* 142.), ovvero da *NT* lato oppoſto del parallelogrammo *TRNP*,

e lo ſpazio, che percorrerebbe il mobile per la ſola forza tangenziale ci viene eſpreſſo per *RT* (*N. cit.*). Dunque lo ſpazio, che ſi paſſerebbe dal mobile nel primo iſtante per la ſola forza centripeta, ſarà infinitamente minore dello ſpazio, che ſi traſcorrerebbe dallo ſteſſo in vigore della pura forza tangenziale.

COROLLARIO.

146. L'angolo formato dalla direzione *RT* della forza impreſſa o centrifuga, e dall' infiniteſimo lato *NR* della Curva ſarà infinitamente minore dell' angolo formato dallo ſteſſo lato *NR*, e dalla direzione *RP* della forza attiva. Poichè eſſendo i ſeni degli angoli, come gli oppoſti lati in un triangolo, ſarà il ſeno dell' angolo *NRP* al ſeno dell' angolo *TRN*, oſſia *RNP* come *NP* : *RP* :: *TR* : *NT*. Ma *NT* è infinitamente minore di *TR* (*N.* 145.). Adunque l'angolo *NRT* ſarà pure infinitamente minore di *RNP*.

TEOREMA III.

147. In qualunque Curva, ſuppoſta coſtante la legge della forza attiva, ſe l'angolo formato dalle direzioni delle forze tangenziale e centripeta ſarà coſtantemente retto, la forza centrifuga o tangenziale ſarà tuttora coſtante (*Fig.*56; 57; 58.). Se ſarà il ſuddetto angolo per qualche tempo acuto, accreſceraſſi la forza tangenziale, e ſcemeraſſi queſta nel caſo, che il predetto angolo ſi mantenga per qualche tempo ottuſo.

DIMOSTRAZIONE. Si aſſuma nella Curva l'infiniteſimo archetto o lato *AC* percorſo in un iſtante dal mobile, e ſi riſolva quindi la forza compoſta *AC* (*N.* 142.) nei lati *AB*

ed *AD* posti primieramente ad angolo retto (*Fig.* 56.), indi ad angolo acuto ed ottuso (*Fig.* 57; 58.), ritenendo però sempre costante la retta *AB*, ch' è proporzionale alla intensità della forza attiva, da noi quivi supposta costante. Dall' estremo quindi di *AC*, presa come raggio, si abbassi la *CP*, la quale sia normale alla direzione di *AD*. Manifesta cosa è, che nel caso, che l'angolo *BAD* sia retto, il seno *CP* coinciderà col lato *CD* del rettangolo *BADC*. Nel caso poi dell' angolo *DAB* acuto, il seno *CP* cadrà oltre il punto *D* sulla direzione della retta *AD* prolungata, e nel caso che l'angolo *BAD* sia ottuso, verrà a tagliare in qualche punto la stessa retta *AD*. Presi quindi eguali archetti consecutivi nella stessa Curva, si compia intorno ad essi la stessa operazione. Se la forza composta *AC* sarà risoluta ed espressa nelle due rette *AD* ed *AB* poste ad angolo retto, essendo *AC* ed *AB* date di posizione e di lunghezza, sarà data per conseguenza ancora *BC*, ovvero *AD*, che ne esprime la forza tangenziale, e risolvendosi medesimamente l'archetto precorso in ogni successivo istante, si troverà similmente la forza tangenziale o centrifuga, come sopra, espressa per una retta eguale ad *AD*, ossia si troverà tale forza tuttora costante. Se l'angolo poi delle forze sarà acuto (*Fig.* 57.), risoluta la forza *AC* composta nelle due *AD* e *DC*, si scomponga in oltre la *DC* nelle due *DP* e *PC*, e chiaro apparirà che la *DP* cospirerà nella direzione di *AD*, ossia della forza tangenziale, e ne accrescerà la intensità; il che valendo similmente nei consecutivi archetti della Curva, supposto l'angolo delle direzioni delle due forze acuto, se quest' angolo durerà per qualche tratto della Curva, andrà successivamente accrescendosi la forza centrifuga o tangenziale.

Sia finalmente l'angolo delle direzioni delle due forze ottuſo, e ſi riſolva l'infinitesimo lato dalla Curva percorſo in un iſtante nelle due forze *AD* e *DC*, e riſolvaſi *CD* eſprimente la forza attiva (*N.* 14.) nelle due *DP* e *DE*, e ſi renderà manifeſto che la *DP* eſprimente una parte della forza attiva, ſi opporrà alla forza tangenziale per *AD*, e ne ſcemerà la prima intenſità. Potendoſi lo ſteſſo diſcorſo applicare a tutt' i latercoli della Curva percorſi nei ſucceſſivi iſtanti, piana coſa è a vederſi, che ſe rimarrà per qualche tempo l'accennato angolo ottuſo, la forza tangenziale andrà ſcemandoſi per tutto queſto tempo nel mobile.

COROLLARIO.

148. Eſſendo poi dovuta la velocità, con cui il corpo ſi muove nella Curva alle due forze attiva e tangenziale (*N.* 142.), ſe rimarrà coſtante la forza attiva, la velocità del mobile ravvolgenteſi nella Curva, ſarà proporzionale alla forza tangenziale, e creſcerà quindi nel caſo che le direzioni delle due forze coſpirino ad angolo acuto, e ſcemeraſſi opponendoſi eſſe ad angolo ottuſo, rimanendo coſtante nel caſo che le ſteſſe direzioni formino ſucceſſivamente tra loro un angolo retto.

TEOREMA IV.

149. La Curva, che deſcriverà un mobile per le due forze tangenziale ed attiva, tendente a un dato centro *F*, ſarà tuttora nel piano formato dalla direzione della forza impreſſa, e dall' accennato centro (*Fig.* 59.).

DIMO-

DIMOSTRAZIONE. Il mobile animato dalle due forze di projezione e centripeta od attiva, percorrerà nel primo iſtante l'infiniteſimo lato *RN* di una Curva. Nel ſecondo iſtante poi ſcorrerebbe per la ſola forza tangenziale, per la ſteſſa *RN* prolungata, ovvero per *MN*, e continuando ad agire la forza centripeta, che ritrae il corpo di continuo verſo *F*, percorrerà il ſuſſeguente lato infiniteſimo *NS* della Curva (*N.* 141.). Ma le rette *FN* ed *MN*, oſſia *FL* ed *MN* ſono nel piano *TRF*. Dunque anche *NS*, che tocca queſte due rette ſarà nello ſteſſo piano *TRF*, il che potendoſi dimoſtrare ſimilmente di tutti gli altri conſecutivi latercoli della Curva, ſarà generalmente vero che la Curva deſcritta per le forze di projezione, ed attiva, la quale tenda coſtantemente a un dato centro, ſarà nello ſteſſo piano formato dal detto centro delle forze e dalla linea di direzione della forza impreſſa o tangenziale.

TEOREMA V.

150. Un corpo, che ſi ravvolga per le due forze tangenziale e centripeta in una Curva *AV*, deſcriverà intorno al punto *F* centro delle forze, aree proporzionali ai tempi, e viceverſa (*Fig.* 60.).

DIMOSTRAZIONE. Si prendano le infiniteſime areette *ARF* ed *RNF*, le quali ſiano tra loro eguali, e dall'eſtremo dell'arco *RN* ſi alzi la retta *NT* parallela ad *RF*, e che vada ad incontrare la tangente *RT* della Curva, e ſi compia il parallelogrammo *NTRP*; eſprimerà *RP* la forza centripeta, e *TR* la forza tangenziale (*N.* 142.), per le quali, inſieme compoſte, ſi percorrerà l'archetto *NR*; con-

dotta quindi *FT*, i due triangoli *FTR* ed *FRN* ſaranno tra loro eguali, poichè inſiſtendo ſulla ſteſſa baſe *RF*, ſaranno ancora compreſi tra le parallele *NT* ed *RF*; ed eſſendoſi preſa l'area *ARF* = *NRF*, ſarà ancora lo ſpazio *FTR* = *ARF*, e le loro baſi *AR* ed *RT* ſaranno eguali. Per la forza adunque tangenziale dovrà il mobile percorrere in egual tempo gli ſpazj *AR* e *TR*. Ma la diagonale *RN* ſi percorre nello ſteſſo tempo, in cui ſi paſſerebbe il lato *TR*, ſe agiſſero le forze ſeparatamente (*N.* 28; 31.). Dunque gl' infiniteſimi archi di Curva *AR* ed *RN*, e quindi le eguali areette *ARF* ed *FRN* ſi percorreranno in egual tempo.

Poſte tali premeſſe, piana e facile ſi rende la verità del propoſto Teorema. Poichè, ſe s'intenderà fluire l'area *ARF*, finchè venga a coincidere *RF* con *FS* e con *FV*, ed a compire quindi le aree finite *ASF* ed *AFV*, quanto ſarà minore il numero delle areette *ARF* contenute nell' area *ASF* di quello ne contenga l'area totale *AVF*, tanto ſarà più velocemente ſcorſa l'area *ASF* dell' area *AFV*. Adunque le aree percorſe nella ſteſſa Curva *AV* intorno allo ſteſſo punto *E*, ſaranno proporzionali ai tempi, in cui vengono traſcorſe.

Viceverſa, ſe ſaranno le aree percorſe dal centro di gravità di un mobile, poſte nello ſteſſo piano di una Curva, e proporzionali ai tempi, in cui ſi traſcorrono, il mobile ſarà attirato continuamente o ſpinto verſo lo ſteſſo centro *F* delle forze. Imperocchè ſe nel primo iſtante percorre il mobile il lato *AR*, nel ſecondo iſtante, ſecluſa la forza centripeta, ſcorrerebbe la retta *TR* = *AR* (*N.* 2.), e conſiderandoſi agente la forza centripeta, ſi piegherebbe a ſcor-

rere l'infinitesimo lato RN del poligono, ossia della Curva AV. Essendo poi per Ipotesi le aree proporzionali ai tempi, dovrà il mobile in tempi eguali percorrere aree eguali, e se nel primo istante trascorre il mobile l'area RAF, nel secondo dovrà percorrere l'area $TRF = RAF$. Ma l'area FRN si è presa eguale ad ARF. Dunque l'area TRF sarà pure eguale all'area RFN, ed avendo questi due triangoli la stessa base RF, avranno pure eguale altezza, e sarà NT che congiunge i loro vertici parallela ad RF. Volendosi adunque risolvere la forza composta RN, si dovrà questa scomporre nelle due TR e TN, ossia TR ed RP date di posizione, e perciò il mobile, siccome per la sola forza tangenziale si dirigerebbe per RT, così per la forza centripeta tenderà per RP verso F. Valendo lo stesso discorso per tutti gl' infinitesimi archi di una qualunque Curva, si potrà generalmente stabilire, che trovandosi le aree percorse proporzionali ai tempi, la forza centripeta od attiva di un mobile ravvolgentesi in una Curva, si drizzerà tuttora verso lo stesso centro F delle forze.

COROLLARIO I.

151. I tempi quindi, in cui si percorreranno due archi qualunque di due Curve descritte per le forze tangenziale e centripeta, saranno in ragione composta diretta delle aree totali, e reciproca delle areette trascorse a ciascun istante. Poichè il tempo infinitesimo t, in cui si trascorre l'area infinitamente picciola ARF (*Fig.*60;61.) al tempo finito T, in cui si percorre l'area data AFV, sarà come $ARF : AFV$, e quindi s'avrà $T = \frac{AFV \cdot t}{ARF}$. Similmente essendo l'istante t', in cui si percorre l'infinitesima area arf al tempo finito T',

in cui si scorre l'intiera area *avf*, come *arf* : *avf*, sarà $T' = \frac{avf \cdot t'}{arf}$. Avrassi adunque l'analogia $T : T' :: \frac{AFV \cdot t}{ARF} : \frac{avf \cdot t'}{arf}$ e omettendo gli equemoltiplici t e t' ossia gli eguali istanti, sarà $T : T' :: \frac{AFV}{ARF} : \frac{avf}{arf}$. Denominando quindi S ed s le aree finite o spazj percorsi nelle due Curve, e quindi DS e ds i loro elementi, avrassi $T : T' :: \frac{S}{DS} : \frac{s}{ds}$.

COROLLARIO II.

152. Se le Curve ritorneranno in se stesse, i tempi periodici delle rivoluzioni dei corpi saranno direttamente come le intiere aree compresse dalle Curve, e reciprocamente come le infinitesime areette percorse in eguali istanti, ossia seguiranno la ragione diretta delle intiere aree circoscritte dalle Curve, e la inversa dei loro elementi. Poichè varrà quì pure la superiore analogia $T : T' :: \frac{ds}{s} : \frac{DS}{S}$, intendendosi però per T, e T' i tempi periodici delle rivoluzioni.

TEOREMA VI.

153. Ravvolgendosi un mobile (*Fig.* 59.) per una Curva *RV* intorno al centro *F* delle forze, se si assumerà un arco *RN*, il quale sia percorso in un istante dal mobile, condotta dall' estremo *N* la normale *NE* sul raggio vettore *FR*, ed *FT* perpendicolare alla tangente *RT*, la velocità, con cui il mobile percorrerà l'arco *RN* sarà $= \frac{RF \cdot NE}{FT}$.

DIMOSTRAZIONE. L'angolo *TRN* di sua natura è infinitesimo, siccome formato dalla tangente e dalla Curva,

e quindi ſi poſſono aſſumere per eguali (*Aſs.* I. *Part.* II.) gli angoli *TRF* ed *NRF*. Saranno adunque ſimili i due triangoli *NRE* ed *FTR*, e ſi potrà inſtituire la proporzione $FR : FT :: NR : NE$, e ſarà perciò $NE = \frac{FT \cdot NR}{FR}$; oſſia eſprimendo *NR* la velocità del mobile (*N.* 142.) nella Curva, denominata tale velocità $= V$, ſarà $NE = \frac{FT \cdot V}{FR}$, donde ſi ha $V = \frac{NE \cdot FR}{FT}$, cioè la velocità del mobile nel percorrere un arco infiniteſimo della Curva, ſarà proporzionale al prodotto del raggio vettore nella perpendicolare condotta dall' eſtremo del minimo arco allo ſteſſo raggio vettore, il tutto diviſo per la normale condotta dal centro delle forze alla tangente del mentovato arco. Denominando quindi il raggio vettore $= R$, ed il perpendicolo $NE = K$, e la normale condotta dal centro delle forze alla tangente $= N$, ſarà $V = \frac{R \cdot K}{N}$.

TEOREMA VII.

154. Percorrendoſi due Curve da due mobili animati dalle due forze di projezione e centripeta (*Fig.* 55;61.), ſaranno generalmente le velocità e le forze tangenziali in ragione diretta delle areette infiniteſime percorſe da ciaſcun mobile nello ſteſſo iſtante, e nella reciproca delle perpendicolari tirate dai centri delle forze alle tangenti dei minimi archi percorſi nelle due Curve allo ſteſſo iſtante.

DIMOSTRAZIONE. Le tangenti di archi infiniteſimi ſi poſſono confondere con gli archi ſteſſi, ed aſſumerſi quindi per eguali (*Aſs.* I. *Part.* II.). Si potranno adunque conſiderare

i triangoli NRF ed nrf come insistenti alle tangenti RT ed rt, ed esprimendo gli archi le velocità relative dei due mobili nel percorrere i detti archi, saranno pure le tangenti RT ed rt atte ad esprimere le stesse velocità. Ma TR, ossia RN è $= \frac{FNR}{FT}$, ed $rn = \frac{fnr}{ft}$ (essendo la base di un triangolo proporzionale all' area divisa per l'altezza). Adunque saranno le velocità, con cui vengono percorsi i due archi RN ed $rn :: \frac{FNR}{FT} : \frac{fnr}{ft}$, e ritenute le superiori denominazioni, avrassi $V : v :: \frac{DS}{N} : \frac{ds}{n}$. Considerate poi queste areette percorse nello stesso istante $= 1$ si avrà ancora $V : v :: \frac{1}{N} : \frac{1}{n}$.

TEOREMA VIII.

155. Se un corpo si ravvolgerà in una Curva per le forze di projezione, ed attiva o centripeta, le direzioni, delle quali facciano un angolo acuto, il mobile s'accosterà al centro F delle forze (*Fig.* 62.), e si discosterà se il detto angolo sarà ottuso.

DIMOSTRAZIONE. Esprima la infinitesima RT la direzione della forza impressa o tangenziale, e lo spazio, che scorrerebbe il mobile in vigore di detta forza, e dinoti l'infinitesima RP la direzione e l'intensità della forza centripeta tendente in F, e sia supposto primieramente l'angolo FRT acuto. Animato il mobile da tutte e due queste forze, percorrerà nello stesso tempo l'archetto infinitamente picciolo RN (*N.* 29.). Essendo poi acuto l'angolo PRT, sarà acuto parimenti l'esterno opposto FPN, e ottuso quindi

FNP per eſſere il terzo angolo *PFN* infiniteſimo per Ipoteſi. Sarà adunque *FN* < di *RF*, e il mobile paſſato da *R* in *N* ſi ſarà accoſtato al centro *F* delle forze. Sia ora l'angolo delle direzioni delle due forze ottuſo, ed eſprima *LM* lo ſpazio, che ſcorrerebbe il mobile in un iſtante per la forza di projezione, ed *MS* lo ſpazio, per cui cadrebbe verſo il centro *F* nello ſteſſo tempo, per la ſola forza centripeta; compito il parallelogrammo, il mobile nello ſteſſo iſtante, ſupponendoſi agire tutte e due le forze, ſi troverà in *H* dopo aver percorſa la diagonale *MH* (*N.* 29.). Eſſendo poi dato l'angolo *LMF* ottuſo, ſarà della ſteſſa ſpecie l'angolo *HSF*, e perciò acuto dovrà eſſere l'angolo *SHF*. Sarà quindi *HF* > *SF*, oſſia di *FM*, ſapendoſi che *SM* è una quantità infiniteſima, ed anche di ſecond' ordine (*N.*145.). Il mobile adunque partitoſi da *M*, e giunto in *H*, ſi ſarà ſcoſtato dal centro delle forze, il che valendo ſimilmente in tutti gl' infiniteſimi archi di una Curva, in cui ſi uniſcano le date forze ad angolo o acuto od ottuſo, ſarà dimoſtrato generalmente che ravvolgendoſi un mobile in una Curva qualunque per le accennate forze, ſe le direzioni di eſſe ſi uniranno ad angolo acuto, ſi accoſterà eſſo mobile al centro *F* delle forze, e da queſto ſcoſteraſſi nel caſo che le predette forze ſi congiungano ad angolo ottuſo.

COROLLARIO I.

156. Viceverſa, ſe ſi accoſterà il corpo al centro *F* delle forze, l'angolo formato dalle direzioni delle due forze centripeta e tangenziale ſarà acuto, e ſe ſcoſteraſſi il mobile dallo ſteſſo centro, l'angolo predetto ſarà ottuſo. Poichè

eſſendo $RF > FN$, ſarà l'angolo $NPF < FNP$. Ma PFN è acuto, perchè ſuppoſto infinitesimo. Dunque FNP ſarà ottuſo, e quindi acuto ſarà l'angolo FPN, oſſia FRT. L'oppoſto ſi proverà, allo ſteſſo modo, nel caſo che il mobile ſi ſcoſti da F.

TEOREMA IX.

157. Ravvolgendoſi un mobile in una Curva qualunque in vigore delle due forze impreſſa ed attiva, ſe s'incontreranno queſte forze colle loro direzioni ad angolo retto (*Fig.* 63.), il mobile ſi accoſterà al centro F, o ſi diſcoſterà da eſſo, o manterrà una coſtante diſtanza, ſecondocchè avrà una forza tangenziale minore, o maggiore, od eguale a quella, la quale congiunta colla attuale forza centripeta, lo farebbe ravvolgere in un cerchio.

DIMOSTRAZIONE. Dinoti RS la forza tangenziale, che combinata colla attiva RP, faccia ravvolgere il mobile per l'archetto circolare Ro, e ſucceſſivamente per l'intiero cerchio, a cui il detto arco appartiene. Eſſendo il raggio vettore nel cerchio coſtantemente eguale, preſo per centro delle forze lo ſteſſo centro del cerchio, ſi manterrà coſtantemente eguale la diſtanza del mobile dal predetto centro delle forze. Suppongaſi poi, che rimanendo coſtante la ſteſſa forza centripeta, per cui il mobile in un iſtante cadrebbe per RP, per l'altra forza tangenziale debba ſcorrere lo ſpazio $RH > RS$. Prolungata quindi la Po in N, e compito il parallelogrammo $PRHN$, dovrà il mobile trovarſi alla fine dello ſteſſo iſtante nell' eſtremo della retta $PN = RH$. Ma RH, oſſia PN è $> Po$, e il punto o per Ipoteſi appartiene alla perifería del cerchio RoD. Dunque il punto N ſarà fuori

dell'

dell' area circolare, e il mobile perciò ſi ſarà ſcoſtato dal centro *F* delle forze. Sia finalmente lo ſpazio, che ſcorrerebbe in un iſtante il mobile in vigore della ſola forza impreſſa, minore di *RS*, e ſia queſto *RT*, reſtando ancora eſpreſſo dalla *RP* quello ſpazio, per cui cadrebbe eſſo mobile verſo *F*, animato dalla ſola forza centripeta. Congiunte le forze alla fine dello ſteſſo iſtante ſi troverà il mobile nel punto *C*, eſtremo della retta $PC = RT$. Ma PC è $< Po$ ſiccome RT è $< RS$, e il punto *o* s' appartiene al cerchio. Dunque il punto *C* cadrà nell' area del cerchio, e il mobile, quindi ſi ſarà accoſtato al centro *F* delle forze, avendo una forza tangenziale minore di quella, che compoſta con una data forza centripeta faceva ravvolgere il mobile in un cerchio.

COROLLARIO.

158. Accoſtandoſi adunque il mobile al centro delle forze allorchè è acuto l' angolo delle direzioni delle forze centripeta, e tangenziale, e creſcendo in tal caſo queſta ſeconda forza, (*N.* 147.) ſi potrà inferirne, che allora quando ſi accreſce la forza tangenziale ſi accoſterà il mobile al centro delle forze, e ciò in vigore delle direzioni delle due aſſegnate forze. Siccome poi formando le predette due forze colle loro direzioni un angolo ottuſo ſi ſcoſta il mobile dal centro, e nello ſteſſo caſo la forza tangenziale ſi ſcema (*N. cit.*), ſi inferirà pure che il mobile dovrà ſcoſtarſi dal centro delle forze, nel caſo che la forza tangenziale venga a ſcemare di ſua energía, il che però non accaderà in vigore di queſto decremento, ma per la congiunzione ſempre delle forze ad angolo ottuſo, come ſi è di ſopra dimoſtrato.

CAPO DECIMO.

DEL MOTO DE' PROJETTI

Nell' Ipoteſi della Gravità coſtante.

TEOREMA I.

159. LA Curva che ſeguiranno nel loro moto i projetti in un mezzo non reſiſtente, ſarà tutt'ora una Parabola Apolloniana. (*Fig.* 64; 65; 66.)

DIMOSTRAZIONE. Sia *AD* la direzione della forza projettile che formi un angolo qualunque colla retta verticale *AS* eſprimente la direzione della forza attiva, originata dalla gravità coſtante. Se ſi ſupporrà quindi che ceſſi di agire per qualche tempo la forza di gravità, il mobile animato nel punto *A* dalla ſola forza impreſſa ſcorrerebbe nella direzione *AD* gli ſpazj *AM*, *AN* proporzionali ai tempi (*N.* 1.). Se poi veniſſe il mobile a cadere dai punti *M* ed *N*, eſtinta di repente la forza di projezione, traſcorrerebbe con direzioni parallele ad *AS* (*Supp.* 1.) gli ſpazj *MR* ed *NT* proporzionali ai quadrati dei tempi (*N.* 76.), e ſarebbe quindi $MR : NT :: \overline{AM}^2 : \overline{AN}^2$. Congiunte poi le forze ſi troverebbe il mobile nello ſteſſo tempo nei punti *R* e *T*, e condotte le rette *PR* e *CT* parallele ad *AD* ſi avrebbe $AP : AC :: \overline{PR}^2 : \overline{CT}^2$, che è appunto la proprietà della Parabola Apolloniana, riferita all' aſſe nel caſo dell' angolo retto (*Fig.* 64.), ed ai diametri nei due caſi dell' angolo obbliquo (*Fig.* 65; 66.). Dunque la Curva che ſeguiranno i projetti ſarà una Parabola Apolloniana.

COROLLARIO I.

160. Denominando quindi la ſemiordinata PR della Parabola $= y$, e l'aſciſſa $AP = x$ ed il parametro $= p$, ſarà per la generale proprietà di tale Curva $y^2 = px$, e $p = \frac{y^2}{x}$; laonde il parametro ſarà una terza proporzionale dopo lo ſpazio per cui cadrebbe liberamente un mobile in vigore di ſua gravità, e lo ſpazio che nello ſteſſo tempo ſcorrerebbe eſſo mobile per la ſola forza impreſſa, le quali quantità ſe ſaranno determinate, ſi potrà deſcrivere per punti ed anco Geometricamente la Parabola, che il corpo dovrà ſeguire col ſuo moto.

COROLLARIO II.

161. Data una Parabola ART ſi potrà determinare la velocità projettile, con cui potrà eſſere percorſa. Poichè nello ſteſſo tempo, in cui cadrebbe il corpo liberamente per AC per l'energía di ſua gravità, dovrà eſſo mobile per l'impreſſa forza di projezione percorrere la corriſpondente ordinata CT, affine che poſſa ravvolgerſi nella data Curva. Ma un corpo acquiſta cadendo liberamente una velocità, con cui nello ſteſſo tempo, e con moto uniforme può ſcorrere un doppio ſpazio (*N.* 81.). Adunque ſe lo ſpazio AC della caduta ſarà $= \frac{CT}{2}$, oſſia ſe avraſſi $2x = y$, e $px = 4x^2$, oſſia $x = \frac{p}{4}$ la velocità acquiſtata dal mobile cadendo per

AC ovvero per *YA* = *AC*, venendo ad operare per rifleſſione ovvero in altra guiſa, ſecondo la direzione della tangente della Curva nel punto *A*, ſarà tale che il mobile potrà con eſſa percorrere la data Curva Parabolica *ART*.

COROLLARIO III.

162. Gli ſpazj che percorrerà in tempi eguali un projetto ſulla Orizzontale *AZ* ſaranno eguali. (*Fig.* 65; 66.) Imperocchè diviſa la linea di direzione della forza projettile nelle eguali parti *AM* ed *MN*, e tirate dai punti *M* ed *N* all' Orizzontale *AZ* le normali *ML* ed *NV*, ſaranno le rette *AL* ed *LV* gli ſpazj Orizzontali che paſſerà il mobile nel tempo che traſcorre le porzioni di Curva *AR* ed *RT*. Ma il mobile nello ſteſſo tempo, in cui percorre queſti archi colla ſola forza impreſſa, che agiſce equabilmente ſcorrerebbe gli eguali ſpazj *AM* ed *MN* (*N.* 30.), e per i triangoli ſimili *AML* ed *ANV* ſi ha *AM* : *MN* :: *AL* : *LV*. Dunque gli ſpazj pure eguali *AL* ed *LV* preſi ſulla ſteſſa Orizzontale *AZ*, ſi percorreranno in eguale tempo.

Ciò ſi vede manifeſtamente ancora nel caſo che la direzione della forza impreſſa faccia angolo retto colla direzione della forza centripeta (*Fig.* 64.), poichè coincidendo la *AD* colla *AZ*, le ſteſſe eguali rette *AM* ed *MN*, che percorrerebbe il mobile in eguale tempo colla ſola forza impreſſa, ſono gli eguali ſpazj preſi ſulla ſteſſa linea Orizzontale, che ſi traſcorrono nello ſteſſo tempo, in cui percorronſi dal mobile gli archi *AR* ed *RT*.

TEOREMA II.

163. L' ampiezza Orizzontale della Parabola *AEZ* computata dal punto *A* della projezione, ſuppoſto l' angolo *DAZ* acclive, ſarà eguale al prodotto del ſemiparametro di eſſa Curva nel ſeno del doppio angolo di elevazione, diviſo per il quadrato del raggio (*Fig.66.*).

DIMOSTRAZIONE. Sia il ſeno dell' angolo di elevazione $DAZ = e$ il coſeno $= c$, il ſeno tutto $= r$, e l' ampiezza da determinarſi $= x$. Prendendoſi quindi *AD* per raggio ſarà *DZ* il ſeno del dato angolo acclive, e ſarà $c : e :: AZ : DZ$, oſſia $c : e :: x : DZ$, che s' avrà quindi $= \frac{ex}{c}$. Ma *DZ* è $= AS$. Dunque ſarà pure $AS = \frac{ex}{c}$. Avraſſi in oltre $c : r :: AZ : AD$, oſſia $c : r :: x : SZ$; e perciò $SZ = \frac{xr}{c}$. Per proprietà generale poi della Parabola ſi ha $p \times AS = \overline{SZ}^2$. Dunque ſoſtituiti i valori analitici ſarà $p . \frac{ex}{c} = \frac{x^2 r^2}{c^2}$ ovvero $p . ec = xr^2$, oſſia $p . \frac{2ec}{r} = 2xr$. Ma $\frac{2ec}{r}$ eſprime il ſeno del doppio angolo di elevazione, che è appunto una quarta proporzionale dopo il raggio, il coſeno e la corda, oſſia il doppio ſeno dell' angolo dato. Adunque ſarà $x = \frac{p}{2} \times \frac{2ec}{r^2}$, oſſia l' ampiezza Orizzontale della Curva ſarà eguale al prodotto del ſeno del doppio angolo di elevazione nel ſemiparametro, il tutto diviſo per il quadrato del raggio.

COROLLARIO I.

164. Se l'angolo di elevazione ſarà infiniteſimo, oſſia $= o$, coincidendo la *AD* colla *AZ* (*Fig.*64.) ſvanirà pure il ſeno del doppio angolo, e l' ampiezza in tale caſo dal punto ricercato ſarà $= o$ (*Fig.*64; 65.). Nel caſo poi che l' angolo ſia declive, cadendo la *AD* ſotto l'Orizzontale *AZ* (*Fig.*65.) ſi troverà il ſeno dell' angolo delle due forze in oppoſta parte di prima, e ſarà eſſo negativo, e l'ampiezza pure ſi dovrà prendere ſulla oppoſta direzione ad *AZ*, il che indicherà che il vertice della Parabola deſcritta e riferita ad un diametro non ſarà nel punto *A*, ma in qualche punto *K* più rilevato ſopra la linea *AE*, che ne deve formare l' ampiezza.

COROLLARIO II.

165. Si potrà quindi, data l'ampiezza Orizzontale della Parabola deſcritta da un projetto, e dato l' angolo di elevazione, aſſegnare il parametro di eſſa Parabola riferita ad un diametro, indipendentemente dalla quantità della forza projettile, e ſi avrà determinata tale Curva. Poichè aſſumendoſi la formola ſuperiore $x = \frac{p}{2} \times \frac{2ec}{r^2}$ fatto il raggio $= 1$ ſi avrà $p = \frac{x}{ec}$. Siccome poi è noto lo ſpazio, per cui cade liberamente un grave in un dato tempo (*N.* 80.) per la ſola forza di gravità, ſuppoſta coſtante, ſi potrà trovare ad ogni iſtante della caduta una media proporzionale tra lo

ſpazio percorſo, e la nota quantità $\frac{x}{ec}$; in direzione parallela alla forza projettile, e ſi potranno quindi determinare ſucceſſivamente i punti, per i quali ſarà paſſato il mobile, oſſia avraſſi indicata la Parabola, che avrà ſeguito nel ſuo moto.

COROLLARIO III.

166. Saranno ancora le Orizzontali ampiezze in diverſe Parabole proporzionali ai ſeni dei doppj angoli di elevazione, poſta la ſteſſa velocità nei projetti. Poichè lo ſpazio, per cui cadrebbe un grave, incominciando dalla quiete, in vigore della ſola forza di gravità ſuppoſta quivi coſtante, ſarà tutt' ora in un dato tempo eguale. Ma è coſtante ancora lo ſpazio, che deſcriverebbe un grave nello ſteſſo tempo per la ſola forza di projezione, ſuppoſta la ſteſſa velocità projettile (*N.* 1.). Dunque ſarà coſtante pure il parametro, che è una terza proporzionale dopo le due ſopradette quantità coſtanti (*N.* 160.). Ciò poſto aſſumendoſi la ſuperior formola $x = \frac{p}{2} \cdot \frac{2ec}{r^2}$, e riſolvendola avraſſi $\frac{p}{2} : r :: x : \frac{2ec}{r}$, e ſimilmente per un' altra Parabola avraſſi $\frac{p'}{2} : r' :: x' : \frac{2e'c'}{r'}$, e ſiccome r e p ſono quantità coſtanti nella ſteſſa Parabola, ſaranno le ampiezze di queſte Curve in ragione dei ſeni dei doppj angoli di elevazione.

COROLLARIO IV.

167. Sarà quindi facile coſa, venendo data l'ampiezza di

una Parabola, e l' angolo d' elevazione *DAZ* (*Fig. 66.*) di trovare l' ampiezza di un' altra Parabola, preſo qualunque altro angolo di elevazione, ſuppoſta però la ſteſſa velocità projettile. Poichè eſſendo le ampiezze proporzionali ai ſeni dei doppj angoli di elevazione, non ſi avrà che ad iſtituire la proporzione che ſegue: ſeno del doppio angolo di elevazione nel primo caſo, all' ampiezza nota, come ſeno del doppio angolo di elevazione nel ſecondo, al quarto termine che diverrà noto colla regola aurea, uſando delle Tavole dei ſeni, e che ci darà l' ampiezza ricercata della Curva.

Sia a cagion d' eſempio l' ampiezza di una Parabola deſcritta ſotto l'angolo di elevazione di 20°, di piedi 400, e ſi cerchi l' ampiezza di un' altra Parabola deſcritta ſotto all' angolo acclive di 36°, 10'. Il Logaritmo del ſeno di 40° ſi trova nelle Tavole = 9. 8080675. Il Logaritmo poi di 400 ſi trova = 2. 6020600, e ſi ha il Logaritmo del ſeno dell' angolo 72°, 20' = 9. 9790192. Adunque ſi avrà la proporzione 9. 8080675 : 9. 9790192 :: 2. 6020600 : al quarto termine che troveraſſi = 2. 7730117, a cui proſſimamente corriſponde nelle Tavole 593, che ſarà il numero dei piedi della ampiezza ricercata.

COROLLARIO V.

168. La maſſima ampiezza di una Parabola ſi avrà allor quando l'angolo *DAZ* acclive all'Orizzontale *AZ* ſarà ſemiretto, ſuppoſta ſempre la ſteſſa velocità projettile. Imperocchè eſſendo le ampiezze come i ſeni dei doppj angoli di elevazione (*N.166.*), creſcendo queſti, dovranno creſcere pure le ampiezze. Ma il ſeno del doppio angolo di eleva-

zio-

zione di 45°, ossia il seno di un doppio semiretto è il raggio, ch' è il limite della grandezza de' seni, ossia il seno massimo. Dunque l'ampiezza, che si avrà, dato l'angolo d'elevazione semiretto, sarà pure la massima di quante possonsi ottenere colla stessa velocità projettile. Saranno ancora eguali le ampiezze delle parabole, presi gli angoli di elevazione egualmente distanti dal semiretto. Poichè essendo i seni dei doppj angoli d'elevazione equidistanti dal semiretto eguali, saranno pure eguali le ampiezze ad essi doppj seni proporzionali.

COROLLARIO VI.

169. Avendosi (*N.* 164.) $s = \frac{p}{2} \times \frac{2 \cdot cc}{r^2}$ risolvendo sarà $r : \frac{2cc}{r} :: \frac{p}{2} : s$, ossia sarà il raggio al seno del doppio angolo di elevazione, come il semiparametro all' ampiezza. Ma nel caso che il seno del doppio angolo di elevazione sia il raggio, essendo semiretto il semplice angolo di elevazione, si ha $r = \frac{2cc}{r}$. Adunque sarà $r : r :: \frac{p}{2} : s$, ossia il semiparametro, in tal caso sarà eguale alla massima ampiezza.

COROLLARIO VII.

170. Data l'ampiezza massima, si troverà ancor di leggieri la velocità del projetto; poichè data l' ampiezza massima, si ha noto il parametro (*N.* 168.). Se adunque tra questo parametro, e lo spazio, che percorre liberamente un grave in un dato tempo, si troverà una media proporzionale, sarà questa l'ordinata della Parabola, ossia lo spazio

percorſo nel dato tempo, il quale determinerà la velocità projettile. Data quindi, a cagion d'eſempio, l'ampiezza d'una Parabola = 200 piedi reali, ſi avrà il parametro = 100, ed eſſendo lo ſpazio, che percorre un grave, cadendo liberamente in un minuto ſecondo, giuſta le più eſatte oſſervazioni, di piedi 15, pollici 1, e linee 7, oſſia di linee 2179, trovata la media proporzionale tra 2179 e 14400, cioè $5601 . \sqrt{6399}$, ſarà queſta la ſemiordinata della Curva, ovvero le ſpazio fatto dal mobile in un minuto ſecondo, in vigore della forza projettile.

COROLLARIO VIII.

171. Viceverſa, data la velocità projettile, ſi potrà determinare la maſſima ampiezza, che ſi avrà nella Parabola, ſuppoſto l'angolo acclive coll' Orizzontale *AZ*. Poichè eſſendo data la velocità del projetto, ſarà determinato lo ſpazio, che dovrebbe percorrere in un dato tempo il mobile nella data direzione in vigore di queſta forza, e ſarà quindi data per eſſo ſpazio la ſemiordinata della Curva. Si avrà pur nota l'aſciſſa corriſpondente, eſſendo dato di ſua natura lo ſpazio, che ſcorrerebbe il mobile nello ſteſſo tempo, cadendo liberamente abbandonato alla ſola forza di gravità. Trovata adunque una terza proporzionale dopo tale aſciſſa, e l'ordinata ſuddetta, ſi avrà noto il parametro (*N.* 160.), la metà di cui ſarà l'ampiezza maſſima ricercata.

Sia lo ſpazio, che percorrerebbe un grave per la ſola forza impreſſa, nello ſpazio di 2″ = 260 piedi. Nello ſteſſo tempo ſi ſa che per le forze di gravità, cadendo liberamente, percorrerebbe 45 piedi, pollici 3, linee 6. Si dovrà dunque,

per avere noto il parametro, trovare una terza proporzionale dopo 45 piedi, pollici 3, linee 6, e 260 piedi, oſſia dopo 6522, e 37440 linee, la quale quantità ſi troverà eſſere = 1401753600 linee = 1499 piedi, pollici 5, linee 10, e ſarà queſto ſpazio l'ampiezza maſſima ricercata.

COROLLARIO IX.

172. Se ſi ricercaſſe l'ampiezza delle Curve paraboliche nel caſo che le direzioni delle due forze tangenziale e centripeta formino un angolo retto o declive (*Fig.* 64;65.), eſſendo data la direzione e l'intenſità della forza projettile, ſi troverà di leggieri, nel caſo dell' angolo retto, l'ampiezza della Curva conſiderata dal punto eſtremo T ſopra una parallela ad AZ eguale alla ſemiordinata maſſima CT, oſſia eguale allo ſpazio, che percorrerebbe il mobile colla ſola forza impreſſa nel tempo, che deſcrive la ſemiparabola ART. Nel caſo poi dell' angolo declive, ſe ſarà nota l'altezza AS, ſi avrà $CS = AS - AC$ ed $\overline{ST}^2 = \overline{CT}^2 - \overline{CS}^2$ ed $ST = \sqrt{\overline{CT}^2 - \overline{SC}^2}$, ſarà la ricercata ampiezza della Curva parabolica ART.

PROBLEMA.

173. Data l'ampiezza Orizzontale AZ, e dato l'angolo di elevazione DAZ, determinare le ſucceſſive corriſpondenti altezze della Curva *Fig.* 66.).

RISOLUZIONE. Sia $AZ = a$, e ſi chiami il ſeno dell' angolo acclive, cioè $DZ = e$, $AB = x$, $BE = z$ ſarà $\overline{AD}^2 = \overline{SZ}^2 = a^2 + e^2$. Per i triangoli ſimili poi AZD, ABH

ſarà $AZ : ZD :: AB : BH$, oſſia $a : e :: x : \frac{ex}{a}$, e quindi $\overline{AH}^2 = x^2 + \frac{e^2 x^2}{a^2}$. Per proprietà poi della Parabola ſi ha $\overline{SZ}^2 : \overline{FE}^2 :: AS : AF :: DZ : HE$, oſſia $a^2 + e^2 : x^2 + \frac{e^2 x^2}{a^2}$ $:: e : \frac{a^2 x^2 e + x^2 e^3}{a^2 \times a^2 + e^2} = \frac{x^2 e}{a^2}$. Adunque ſi troverà $BE = HB - HE$, oſſia $z = \frac{ex}{a} - \frac{x^2 e}{a^2}$, e aſſegnati i ſucceſſivi funzionarj valori di x, ſi avranno note dall' equazione le ſucceſſive altezze del getto parabolico ſopra l'Orizzontale AZ.

COROLLARIO I.

174. Se ſi vorrà quindi ſapere il luogo, a cui corriſponde l'altezza maſſima del getto, ſapendoſi dall' andamento della Curva, che vi può e vi deve eſſere queſto maſſimo, ſi differenzj la ſuperiore equazione $z = \frac{ex}{a} - \frac{x^2 e}{a^2}$, e ſi faccia $\frac{edx}{a} - \frac{2exdx}{a^2} = 0$, ovvero $\frac{edx}{a} = \frac{2exdx}{a^2}$, donde s' avrà $ea^2 = 2eax$, e quindi $x = \frac{a^2}{2a}$, oſſia $x = \frac{a}{2}$. Alla metà adunque di AZ vi corriſponde la maſſima altezza del getto.

COROLLARIO II.

175. Diviſa per metà la AZ in B, ſe da queſto punto ſi alzerà la perpendicolare BE (*Fig. 66.*), e ſi prolungherà queſta ſino al concorſo colla direzione della forza projettile in H, ſarà $BE = HE$. Poichè eſſendo ſimili i triangoli ABH, AZD, ſarà $AB : AZ :: BH : ZD$. Ma per Ipo-

teſi AB è eguale alla metà di AZ. Dunque BH ſarà pure $= \frac{ZD}{2}$, ed eſſendo in oltre $ZD : BH :: AD : AH$, ſarà pure $AH = \frac{AD}{2}$. Per proprietà poi della Parabola, ſi ha ancora $SZ^2 : FE^2 :: AS : AF$, oſſia $AD^2 : AH^2 :: ZD : HE$; e $\frac{AD^2}{4}$ è $= AH^2$. Dunque $\frac{ZD}{4}$ ſarà $= HE$. Eſſendo adunque $BE + HE$, ovvero $BH = \frac{ZD}{2}$ ed $HE = \frac{ZD}{4}$, ſarà pure $BE = \frac{ZD}{4}$, oſſia ſarà $BE = HE$.

COROLLARIO III.

176. Si potrà quindi determinare ancora l'altezza maſſima BE del getto, eſſendo nota l'ampiezza AZ, e dato l'angolo acclive DAZ (*Fig. 66.*). Poichè preſa AD per raggio, ſarà DZ il ſeno, e AZ il coſeno dell' angolo di elevazione, e ſi potrà iſtituire la proporzione $AZ : DZ :: AB : BH$, che diverrà nota, eſſendo dati i primi tre termini, e preſo quindi il valore di $\frac{BH}{2}$, ſi avrà nota l'altezza cercata.

COROLLARIO IV.

177. Data la velocità projettile, e data l'altezza VT del punto T da colpirſi, eſſendo nota la diſtanza Orizzontale AV, ſarà facil coſa il trovare l'angolo d' elevazione da darſi al getto. Poichè eſſendoſi trovato per il valore funzionario di tutte le ſucceſſive altezze della Parabola ſopra la AZ (*N.* 173.) $z = \frac{axe}{a^2} - \frac{ex^2}{a^2}$, ed eſſendo nota la quan-

tità $VT = z$ ed $AV = x$, ſi avrà il valore determinato di $e = \frac{a^2 z}{ax - x^2}$. Se ſarà quindi $ax < x^2$, l'angolo ſarà negativo, e ſi dovrà prendere declive all' Orizzontale AZ, e la formola ſervirà nel caſo che la retta VT cada ſotto la AZ. Se ſarà poi $ax - x^2 < a^2 z$, il problema ſarà impoſſibile, poichè riſulterebbe il ſeno dell' angolo trovato > 1, e la data velocità non ſarebbe atta per raggiugnere il berſaglio. Finalmente ſe avraſſi $x^2 = ax$, il problema ſarà pure inſolubile, poichè in tal caſo riuſcirebbe $\frac{a^2 z}{0} = e$, cioè il ſeno diverrebbe infinito.

TEOREMA III.

178. L'altezza maſſima, a cui può giugnere un projetto ſopra l'Orizzontale AZ, ſarà al ſeno verſo del doppio angolo di elevazione, come il parametro al raggio ottuplo (*Fig. 66.*).

DIMOSTRAZIONE. Si chiami, come ſopra, il ſeno dell' angolo di elevazione $= e$, il coſeno $= c$, il raggio $= r$, ed il parametro $= p$. Sarà quindi l' ampiezza totale eſpreſſa per $\frac{2ec}{r} \times \frac{p}{2.r}$ (*N.* 163.) $= \frac{ecp}{r^2}$. Aſſumendoſi poi AD per raggio, ſarà $c : e :: AZ : DZ$, oſſia $c : e :: \frac{ecp}{r^2} : DZ = \frac{e^2 cp}{c.r^2} = \frac{e^2 p}{r^2}$, ed eſſendo l'altezza maſſima $BE = \frac{DZ}{4}$ (*N.* 175.), ſarà pure $BE = \frac{e^2 p}{4.r^2}$. L'eſpreſſione poi del ſeno del doppio angolo di elevazione ſi è trovata ſuperiormente $= \frac{2ec}{r}$ (*N.* 163.). Il coſeno adunque di queſto doppio angolo

farà $= \sqrt{r^2 - \frac{4e^2c^2}{r^2}} = \sqrt{\frac{r^4 - 4e^2c^2}{r^2}}$. Ma ſi ha in oltre $e^2 = r^2 - c^2$. Sostituito adunque il valore di e^2, ſi avrà $\sqrt{\frac{r^4 - 4e^2c^2}{r^2}} = \sqrt{\frac{r^4 - 4r^2c^2 + 4c^4}{r^2}} = \frac{-r^2 + 2c^2}{r}$, e ſurrogato in luogo di $-r^2$ il valore $-e^2 - c^2$, avraſſi $\frac{-r^2 + 2c^2}{r} = \frac{-e^2 - c^2 + 2c^2}{r}$, oſſia $\frac{-e^2 + c^2}{r}$ per il valore del coſeno del doppio angolo di elevazione. Il ſeno verſo poi dello ſteſſo doppio angolo, che deve eſſere = al raggio meno il coſeno, ſi troverà $= \frac{r^2 + e^2 - c^2}{r}$, e introdotto il valore di r^2, cioè $e^2 + c^2$, riſulterà per il valore dello ſteſſo ſeno verſo, l'eſpreſſione $\frac{e^2 + c^2 + e^2 - c^2}{r} = \frac{2e^2}{r}$. Per la verità adunque del Teorema, dovrà valere l'analogia ſeguente $\frac{e^2 p}{4r^2} : \frac{2e^2}{r} :: p : 8r$. Ma fatti i prodotti delle quantità medie ed eſtreme, ſi ha $\frac{2e^2 p}{r} = \frac{2e^2 p}{r}$, oſſia $o = o$. L'altezza adunque maſſima del getto, al ſeno verſo del doppio angolo di elevazione, ſarà come il parametro, al raggio ottuplo

COROLLARIO I.

179. Data la velocità projettile, ci vien determinato il parametro delle Curve deſcritte (*N.* 160.). Conſiderato adunque il raggio $r = 1$, ſaranno le altezze maſſime in diverſe Parabole proporzionali ai ſeni verſi dei doppj angoli di elevazione.

COROLLARIO II.

180. L' altezza maſſima di un getto parabolico, poſta la ſteſſa velocità projettile, ſi avrà trovandoſi proſſimamente retto l' angolo di elevazione. Poichè ſeguendo le altezze la ragione dei ſeni verſi dei doppj angoli di elevazione (*N.* 179.), ed eſſendo il ſeno verſo del doppio angolo acclive preſſo a 90°, eguale proſſimamente al diametro, di cui non ſi dà maggior ſeno verſo, ſi avrà in tal caſo la maſſima altezza del getto.

PROBLEMA.

181. Data la velocità projettile, e dato l'angolo ottuſo delle direzioni delle due forze tangenziale e centripeta, determinare Geometricamente l' ampiezza, l' altezza, ed il parametro della Curva da deſcriverſi (*Fig.* 67.).

RISOLUZIONE. Sopra l'Orizzontale AZ, che ha principio dal punto di projezione A, ſi alzi la normale AB, la quale ſia l' altezza, da cui cadendo liberamenre il mobile, acquiſterebbe alla fine della caduta, una velocità eguale alla data. Sopra la ſteſſa AB, preſa per diametro, ſi deſcriva un ſemicerchio, il quale taglierà la direzione della forza projettile in qualche punto x, per cui ſi tiri una parallela all' Orizzontale AZ, e ſi faccia $Ox = Rx$. Dal punto R ſi abbaſſi la RL normale ad AZ, e ſi prolunghi finchè vada a tagliare la direzione AD in M; dico che l'altezza della Curva ſarà $= RL = AO$, e l' ampiezza $= 4Ox$, ed il parametro della Curva riferita all' Aſſe $= BO$. Poichè, eſſendo eguali i due triangoli AOx ed MRx, ſarà $MR = AO$, e quindi

MR

$MR = RL$. Sarà adunque RL, ossia AO l'altezza massima del getto (*N.*175.).

Essendo poi $OR = 2Ox$, e dovendo essere $AL = OR$ eguale alla metà dell' ampiezza (*N.* 174.) sarà la ricercata ampiezza della Curva $= 2AL = 2OR = 4Ox$. Quadrandosi quindi quest' ultima Equazione $2AL = 4Ox$, ossia $AL = 2Ox$, avrassi $\overline{AL}^2 = 4\overline{Ox}^2$. Ma $\overline{Ox}^2$ è $= BO \cdot AO$ per proprietà del cerchio. Adunque sarà $4\overline{Ox}^2 = 4BO \cdot AO = 4BO \cdot RL$. Ma RL si è l'ascissa abbassata del vertice R, e $2Ox$, ossia AL la semiordinata di questa Parabola riferita all' asse RL. Adunque $4BO$ sarà il parametro di essa.

COROLLARIO I.

182. Data quindi unicamente la intensità e la direzione della forza projettile, vengono determinate tutte le ampiezze e le altezze dei getti parabolici, che possonsi avere a qualunque angolo di elevazione. Così supposto a cagion d' esempio il doppio angolo acclive AED, sarà AK l'altezza del getto, l' ampiezza $= 4KE$, ed il suo parametro $= 4BK$.

COROLLARIO II.

183. Siccome poi AB è normale ad AZ nel punto A, sarà AZ tangente del cerchio in A, e l' angolo $ZAD = ABx$ posto nel segmento alterno. S'avrà adunque l' angolo esterno $OHx = 2HBx = 2DAZ$, ed Ox che è la quarta parte dell' ampiezza sarà il seno retto del doppio angolo di elevazione, ed AO, che è l' altezza massima del getto sarà

il ſeno verſo dello ſteſſo doppio angolo di elevazione. Eſſendo poi la retta Ox maſſima, allorquando la linea di direzione della forza impreſſa taglia per metà il ſemicerchio formando angolo ſemiretto con AZ, nel qual caſo ſi ragguaglia al raggio, ſi renderà pure manifeſto che le maſſime ampiezze dei getti parabolici, poſta la ſteſſa projettile velocità, ſi avranno ſotto all' angolo acclive di 45°.

COROLLARIO III.

184. Se la direzione della forza impreſſa ad un mobile formerà angolo retto coll' Orizzontale AZ, coincidendo col diametro AB del cerchio, ſvanirà in tale caſo la linea o ſeno KE, ed il ſeno verſo BK; laonde non vi avrà più ampiezza, nè parametro di Curva, ed il projetto dovrà ſcendere per la ſteſſa retta perpendicolare all' Orizzonte, per cui ſarà aſceſo.

CAPO UNDECIMO.

DELLA RIVOLUZIONE DEI CORPI NEL CERCHIO.

TEOREMA I.

185. SE un corpo ravvolgeraſſi in un Cerchio con una forza centripeta tendente al fuoco o centro F, la velocità di eſſo mobile ſarà coſtante (*Fig.* 68.).

DIMOSTRAZIONE. La velocità in qualunque punto R di una qualſiſia Curva è eſpreſſa per l' unità, diviſa per la normale condotta alla tangente del dato punto, oſſia =

$\frac{1}{N}$(*N.* 154). Ma la normale condotta alla tangente di qualsiſia punto del Cerchio, ſi è il raggio, che è una quantità coſtante. Dunque ec.

TEOREMA II.

186. La forza centripeta tendente al fuoco *F*, che coſpira a far ravvolgere un corpo nel Cerchio, è coſtante in tutto il tempo della rivoluzione (*Fig. 69.*).

DIMOSTRAZIONE. Sia l' arco *RN* infiniteſimo, il quale ſia percorſo dal mobile in un iſtante, e ſi conduca *NP*, la quale ſia parallela alla direzione della forza projettile. Eſprimerà l' arco *RN*, la velocità, con cui ſi ravvolge il mobile nel cerchio, ed *RP*, la forza centripeta di eſſo (*N.* 142.). Ma *RP* è $= \frac{\overline{Np}^2}{CR}$, potendoſi confondere *CP* con *CR*, per eſſere *RP* infiniteſima per rapporto ad *NP* (*N.* 145.). Adunque ſarà *RP* una terza proporzionale dopo il diametro del Cerchio, e la forza oſſia la velocità, con cui ſi ravvolge il mobile nel Cerchio. Ma tale velocità è coſtante in tutto il tempo della rivoluzione (*N.* 185.), ſiccome pure il diametro. Adunque *RP*, oſſia la forza centripeta tendente al centro *F*, che congiunta colla forza tangenziale fa ravvolgere un corpo in un Cerchio, ſarà tutt' ora invariabile, e coſtante.

COROLLARIO I.

187. Venendo la coſtante forza centripeta, che rattiene

un corpo in un Cerchio, espressa per una terza proporzionale dopo la velocità, con cui si ravvolge un corpo in un Cerchio, ed il diametro di esso: se si denomineranno V ed v le velocità di due corpi ravvolgentisi in due Cerchj, ed i diametri di questi chiamerannsi D e d: e le forze centripete G e g, si avrà per la forza centripeta di un mobile, l'espressione $G = \frac{VV}{D}$, e per quella dell' altro $g = \frac{vv}{d}$, e potrassi quindi stabilire l'analogia $G : g :: \frac{VV}{D} : \frac{vv}{d}$, donde si ha ancora $V : v :: \sqrt{GD} : \sqrt{gd}$.

COROLLARIO II.

188. Saranno ancora i tempi periodici, ossia i tempi delle intiere rivoluzioni nei Cerchj, in ragione diretta dei diametri, e inversa delle velocità; ed anco nella ragione suddupplicata diretta dei diametri, e inversa delle forze centripete. Poichè essendo costante la velocità di un mobile, che ravvolgesi in un Cerchio (*N.*185.), sarà ancora equabile il moto di esso, e saranno gli spazj in ragione composta diretta dei tempi e delle velocità, ossia sarà $S : s :: TV : tv$ (*N.* 3.). Siccome poi gli spazj che trascorronsi nei tempi periodici, sono le stesse periferie dei Cerchj, alle quali si possono sostituire i diametri, sarà ancora $D : d :: TV : tv$, e quindi $T : t :: \frac{D}{V} : \frac{d}{v}$. Introdotte poi le espressioni analoghe di V ed v, ricavate superiormente (*N. preced.*), avrassi ancora $T : t :: \frac{D}{\sqrt{DG}} : \frac{d}{\sqrt{dg}}$, ossia $T : t :: \sqrt{\frac{D}{G}} : \sqrt{\frac{d}{g}}$.

COROLLARIO III.

189. Saranno quindi le forze centripete in ragione compoſta inverſa dei quadrati dei tempi periodici, e diretta dei diametri. Poichè eſſendo $T : t :: \sqrt{\frac{D}{G}} : \sqrt{\frac{d}{g}}$, ſarà $T^2 : t^2 :: Dg : dG$, e quindi $G : g :: \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$.

COROLLARIO IV.

190. Suppoſti i tempi periodici eguali, le forze centripete ſaranno direttamente come i diametri, e poſti eguali i diametri, ſaranno le ſuddette forze nella inverſa dei quadrati de' tempi. Poichè nel primo caſo (preſa l' analogia del numero precedente), e tolti unicamente gli eguali ſottomoltiplici T^2 e t^2, rimane $G : g :: D : d$; e nella ſeconda Ipoteſi, traſcurati gli equemoltiplici D e d, riſulta $G : g :: \frac{1}{T^2} : \frac{1}{t^2}$.

COROLLARIO V.

191. Se i tempi periodici ſaranno in ragione ſudduplicata dei diametri, le velocità ſeguiranno la ſteſſa ragione. Poichè eſſendo in generale $T : t :: \frac{D}{V} : \frac{d}{v}$ (*N.* 188.), ſarà ancora $V : v :: \frac{D}{T} : \frac{d}{t}$, ed $V^2 : v^2 :: \frac{DD}{TT} : \frac{dd}{t^2}$. Ma per Ipoteſi deve eſſere $T : t :: \sqrt{D} : \sqrt{d}$, e quindi $T^2 : t^2 :: D : d$. Surro-

gati adunque i valori analoghi dei quadrati dei tempi, avraſſi $V^2 :: v^2 :: \frac{DD}{D} : \frac{dd}{d}$, oſſia $V : v :: \sqrt{D} : \sqrt{d}$.

COROLLARIO VI.

192. Se le forze centripete ſaranno eguali, i tempi periodici ſaranno in ragione ſudduplicata dei diametri, e viceverſa. Poichè nell' analogia generale ſtabilita ſuperiormente (*N.* 188.) $G : g : \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$ ſe ſarà $G = g$ ſarà ancora $T\sqrt{d} = t\sqrt{D}$, e quindi $T : t :: \sqrt{D} : \sqrt{d}$. Così pure ſe ſarà $T : t : \sqrt{D} : \sqrt{d}$, e però $T^2 : t^2 :: D : d$, ſarà $\frac{D}{T^2} = \frac{d}{t^2}$. Ma $G : g :: \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$. Dunque in tale Ipoteſi ſarà $G = g$.

COROLLARIO VII.

193. Se i tempi periodici ſaranno proporzionali ai diametri, le forze centripete ſeguiranno la ragione dei diametri reciprocamente preſi. Perciocchè in tale Ipoteſi le quantità V ed v ſaranno nella proporzione l' officio di equemoltiplici, che ſi poſſono traſcurare. Aſſumendoſi quindi l' analogia generica delle forze centripete ſtabilita di ſopra (*N.* 187.), cioè $G : g :: \frac{V^2}{D} : \frac{v^2}{d}$ rimarrà $G : g :: \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$.

Viceverſa ſe ſarà $G : g :: d : D$, introdotti nella formola ſuperiore $G : g :: \frac{V^2}{D} : \frac{v^2}{d}$ i valori analoghi delle for-

ze centripete sarà $D : d :: \frac{v^2}{d} : \frac{V^2}{D}$, ossia $\frac{1}{d} : \frac{1}{D} :: \frac{v^2}{d} : \frac{V^2}{D}$, e quindi $V^2 = v^2$, ed $V = v$.

COROLLARIO VIII.

194. Quindi se i quadrati dei tempi periodici saranno proporzionali ai cubi dei diametri, le velocità saranno in ragione inversa sudduplicata degli stessi diametri. Imperocchè dalla formola stabilita (*N.* 188.) $T : t :: Dv : dV$ si ha $V : v :: \frac{D}{T} : \frac{d}{t}$, e quadrati tutti i termini $V^2 : v^2 :: \frac{D^2}{T^2} : \frac{d^2}{t^2}$; laonde se sarà $T^2 : t^2 :: D^1 : d^1$, avrassi $V^2 : v^2 :: \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$ ed $V : v :: \sqrt{d} : \sqrt{D}$.

All' opposto se sarà $V^2 : v^2 :: d : D$, sostituiti i valori analoghi di V^2 e di v^2 (*N.* 191.) risulterà $\frac{D^2}{T^2} : \frac{d^2}{t^2} :: d : D$, e quindi $D^1 t^2 = d^1 T^2$, e risolvendo $T^2 : t^2 :: D^1 : d^1$.

COROLLARIO IX.

195. Se le forze centripete troveransi reciprocamente proporzionali ai quadrati dei diametri, saranno i quadrati dei tempi periodici, come i cubi degli assi, ossia dei diametri. Poichè avendosi per l' Ipotesi $G : g :: d^2 : D^2$, sarà ancora $D^2 : d^2 :: \frac{T^2}{D} : \frac{t^2}{d}$ (*N.* 188.), ossia $d^1 T^2 = D^1 t^2$, e risolvendo $T^2 : t^2 :: D^1 : d^1$.

Viceverſa ſe ſarà $T^2 : t^2 :: D^1 : d^1$, ſarà $G : g :: d^2 : D^2$; poichè preſa l' analogia delle forze centripete (*N.* 189.) $G : g :: \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$, ſe ſi introdurranno i valori analoghi dei quadrati dei tempi, giuſta la fatta Ipoteſi, ſarà $G : g :: \frac{D}{D^2} : \frac{d}{d^2}$, oſſia $G : g :: d^2 : D^2$.

COROLLARIO X.

196. Più generalmente ancora, denominando n l' eſponente della podeſtà dei diametri, ſe ſaranno i tempi periodidici, come le potenze N ed n dei diametri D e d di due Cerchj, ſarà $V : v :: D^{n-1} : d^{n-1}$. Poichè avendoſi (*N.* 194.) $V : v :: \frac{D}{T} : \frac{d}{t}$, ſarà ancora $V : v :: \frac{D}{D^n} : \frac{d}{d^n}$ oſſia $V : v :: d^{n-1} : D^{n-1}$. Se ſaranno i tempi T e $t :: D^n : d^n$, ſi avrà ancora per le forze centripete l' analogia $G : g :: D^{2n-1} : d^{2n-1}$. Poſciacchè eſſendo $G : g :: \frac{t^2}{d} : \frac{T^2}{D}$ (*N.* 189.) fatte le convenienti ſoſtituzioni riſulterà $g : G :: \frac{D^{2n}}{D} : \frac{d^{2n}}{d}$, oſſia $g : G :: D^{2n-1} : d^{2n-1}$.

TEOREMA III.

197. La velocità, con cui un mobile ſi ravvolge in un Cerchio con moto uniforme, è eguale a quella, che acquiſterebbe cadendo liberamente per la metà del raggio, colla ſteſſa forza centripeta, che lo faceva ravvolgere nel Cerchio (*Fig.* 68).

Di-

DIMOSTRAZIONE. Sia il diametro AB del cerchio $= D$, e la velocità con cui ſi aggira il mobile $= V$ ſarà la forza centiripeta $= \frac{VV}{D}$ (*N.* 187.), e ſi prenda AE eguale alla quarta parte del diametro $= \frac{D}{4}$. La velocità che acquiſterà il mobile cadendo da A in E ſarà eguale a due radici dello ſteſſo ſpazio moltiplicato nella forza centripeta (*N.*82.) oſſia $= 2\sqrt{\frac{VV}{D} \cdot \frac{D}{4}} = 2\sqrt{\frac{VV}{4}}$. Si ragguagli ora queſta velocità con quella, che ha il mobile ravvolgenteſi nel Cerchio ed avraſſi $2\sqrt{\frac{VV}{4}} = V$, oſſia $V = V$, donde è chiaro che la velocità di un mobile, che ſi ravvolge nel Cerchio è eguale a quella, che acquiſterebbe cadendo per la quarta parte del diametro.

COROLLARIO.

198. Il tempo quindi periodico, in cui ſi compie da un mobile una rivoluzione intiera in un Cerchio, al tempo, in cui cadrebbe per la quarta parte del diametro, ſarà come la circonferenza al raggio. Poichè la velocità acquiſtata dal mobile caduto liberamente da A in E, punto che determina la metà del raggio, è tale che con eſſa potrebbe il mobile con moto uniforme percorrere un doppio ſpazio nello ſteſſo tempo, oſſia l' intiero raggio CA (*N.* 81.). Ma gli ſpazj percorſi colla ſteſſa velocità ſono proporzionali ai tempi (*N.* 1.). Dunque il tempo periodico, al tempo,

in cui cadrebbe da *A* in *E*, ſarà come la circonferenza al raggio.

PROBLEMA

199. Dato il tempo periodico, in cui ſi ravvolge un corpo in un dato Cerchio con una forza centripeta tendente al fuoco *F*, trovare il rapporto di queſta forza colla comune gravità de' corpi terreſtri.

RISOLUZIONE. Dato il tempo periodico, ed il diametro del Cerchio (*Fig.*68.), ſi troverà di leggieri il tempo *T*, in cui cadrebbe il mobile con moto uniformemente accellerato da *A* in *E* (*N. preced.*) colla ſteſſa forza centripeta, che ha in *A*. Eſſendo poi data la legge di gravità, ſi potrà ſimilmente determinare lo ſpazio, che in vigore di eſſa forza percorrerebbe un grave nello ſteſſo tempo *T* (*N.*80.). Ma le forze acceleratrici ſono in ragione degli ſpazj percorſi in tempi eguali (*N.* 85.). Adunque la forza centripeta, che rattiene il corpo nel Cerchio, ſarà alla forza di gravità comune ai corpi terreſtri, come la metà del raggio, allo ſpazio, che percorrerebbe liberamente il grave nello ſteſſo tempo, in cui il corpo che ſi muove nel Cerchio cadendo dal punto *A* liberamente, ſcorrerebbe per la propria forza centripeta la metà del raggio, oſſia *AE*. Supponendo quindi che lo ſpazio percorſo nel dato tempo *T* da un grave, nel moto libero e accelerato dalla comune gravità de' corpi terreſtri ſia eſpreſſo per la retta *DC*, ſarà la forza centripeta che ritiene il corpo nel Cerchio, alla comune gravità dei corpi terreſtri :: *AE* : *DC*, oſſia come la quarta parte del diametro dato : *DC*; il che ſi dovea trovare.

TEOREMA IV.

200. Se ſi ravvolgeranno due corpi in due Cerchi *RNC* ed *ATB*, e ſe le loro forze centripete ſaranno decreſcenti in reciproca ragione dei quadrati delle diſtanze dai centri *F* ed *f* delle forze, e proporzionali alle maſſe *M* ed *m* ſituate negli ſteſſi centri, dovranno le maſſe eſſere proporzionali ai cubi dei diametri, diviſi per i quadrati dei tempi periodici (*Fig.* 68; 69.).

DIMOSTRAZIONE. Eſſendo le forze centripete proporzionali alle maſſe centrali, ſarà $G : g :: M : m$, e ſeguendo le ſteſſe forze la inverſa ragione dei quadrati delle diſtanze dai centri delle forze, oſſia dei raggi, denominati queſti *R* ed *r*, ſarà in oltre $G : g :: \frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2}$. Ma ſi ha (*N.* 189.) $G : g :: \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$, oſſia $G : g : \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$. Adunque ſarà $\frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2} :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, e quindi $M : m :: \frac{R^3}{T^2} : \frac{r^3}{t^2}$.

COROLLARIO.

201. Quindi ſe ne dedurranno facilmente i ſeguenti Teoremi. I. Che i quadrati dei tempi periodici ſaranno come i cubi dei diametri, diviſi per le riſpettive maſſe. II. Che i cubi dei raggi ſaranno in ragione compoſta delle maſſe e dei quadrati dei riſpettivi tempi periodici. III. Che ſe ſaranno i quadrati dei tempi periodici reciprocamente come i cubi dei raggi, le maſſe ſaranno eguali.

IV. Che ſe ſaranno eguali i due Cerchi, le maſſe ſaranno come i quadrati dei tempi inverſamente preſi. V. Che ſe i tempi periodici ſaranno eguali, le maſſe ſaranno come i cubi degli aſſi. VI. Che ſe ſaranno i quadrati dei tempi periodici reciprocamente proporzionali alle maſſe, i Cerchi ſaranno eguali.

CAPO DUODECIMO.

DELLA RIVOLUZIONE DEI CORPI NELL' ELISSE E NELL' IPERBOLA

per una forza attiva che gli attrae all' uno dei fuochi.

LEMMI.

202. I.° NELl' Eliſſe, e nell' Iperbola il rettangolo dei due ſemiaſſi tranſverſo, e conjugato è eguale al parallelogrammo formato dai due ſemidiametri (*Fig.* 70.).

DIMOSTRAZIONE. Siano i due aſſi delle due Curve *AB* e *DK*, e i due diametri *MS* e *GI*, e ſi intenda formato il rettangolo *RQ* dai due aſſi, ed il rettangolo *MS* intorno ai due diametri. Si coſtruiſcano in ſeguito i due parallelogrammi *TFXf* e *DBAK*, il primo intorno ai diametri, l'altro attorno agli aſſi. Conducaſi quindi la *DP* parallela a *GI*, e ſi prolunghi finchè vada a tagliare il lato *TF* in *Z* e congiunganſi i punti *D* ed *I* colla retta *DI*; ſi produca ancora il lato *SI*, finchè giunga a toccare *RL* in *O*. Intorno agli aſſi *BA* e *DK* ſi deſcriva un' Eliſſe, la quale dovrà paſſare per i quattro punti *I*, *M*, *G*, *S*. Eſſendo poi la *TF* condotta per il punto *I* eſtremo di *CI*, parallela

al diametro *MS*, ſarà *TF* tangente dell' Eliſſe nel punto *I*, e s'avrà quindi *CF* : *CB* :: *CB* : *CH* (come coſta dalle note proprietà dell' Eliſſe). Ciò preſuppoſto, dico che ſarà il rettangolo *CHOD* eguale al parallelogrammo *PCZI*, poichè ciaſcuno è doppio del triangolo *DCI*, avente con eſſi egual baſe ed eguale altezza. Siccome poi i parallelogrammi *CFUY*, *BCRD*, *CHDO* hanno tutti e tre una eguale altezza e le baſi *CF*, *CB*, *CH* in continua Geometrica proporzione, ſarà *CFVY* : *CBRD* :: *CBRD* : *CHDO*. Similmente eſſendo pure *VC* : *MC* :: *MC* : *PC* per la ſteſſa proprietà di queſte Curve riferite ai diametri, ed avendo i parallelogrammi *VCYF*, *MCTI*, *PCZI* le altezze eguali, ſi potrà iſtituire la proporzione *CFVY* : *MTCI* :: *MTCI* : *PCZI* oſſia : *CDHO*. Per eſſere adunque tanto il rettangolo *MTIC*, quanto il rettangolo *CBRD* una media proporzionale tra gli ſteſſi due parallelogrammi *CFVY* ed *HCDO*, ſarà il rettangolo *CBRD* eguale al parallelogrammo *MITC*. Ma il rettangolo *CBRD* è formato dai due ſemiaſſi *DC* e *BC*, ed il parallelogrammo *MITC*, viene formato dai due ſemidiametri *CM* e *CI* della ſteſſa Eliſſe od Iperbola. Adunque ec.

COROLLARIO I.

203. Se ſi condurrà quindi dal punto *R* l' ortogonale *RH* (*Fig.* 71;72.) ſulla direzione del diametro *CM*, ſarà ancora il rettangolo dei due ſemiaſſi eguale al rettangolo di *CM* moltiplicata per *RH*; poichè tanto nell' Eliſſe, quanto nell' Iperbola il parallelogrammo formato dai due ſemidiametri *CM* e *CR*, avrà la ſteſſa baſe ed altezza col

rettangolo fatto da $CM.RH$; e perciò saranno tra loro eguali. Ma il parallelogrammo di CM e CR si è trovato = $CA.CD$. Adunque sarà $CM.RH = CA.CD$, e quindi si avrà l'analogia $CM : CA :: CD : RH$.

204. II. Nell' Ellisse e nell' Iperbola se condurrassi dall' uno dei fuochi F l' ordinata FR (*Fig.* 71; 72.), e si prolungherà questa nell' Iperbola, finchè venga a tagliare la direzione del diametro secondario CM, l'intercetta RI tra la Curva e la direzione del diametro suddetto, sarà eguale al semiasse transverso CA.

Dimostrazione. Sia RT tangente dell' Ellisse nel punto R, e dallo stesso punto si abbassi la Rf, e si tiri quindi la fE parallela a TR, e supponga si il rimanente come sopra. I due angoli formati dalle ordinate dai fuochi, colla tangente, cioè TRF ed fRt, per proprietà dell' Ellisse, saranno eguali. Essendo poi fE parallela alla tangente TR, sarà l' angolo $EfR = tRf$, ed $REf = TRE$. Adunque gli angoli REf ed RfE saranno eguali, ed il triangolo REf isoscele, e quindi $RE = Rf$. Deve poi essere $FR + Rf$, cioè la somma delle ordinate dai fuochi eguale all' asse transverso AB. Adunque si avrà $Rf + RE + EI + IF = AB$. Per essere poi simili i triangoli FEf, ICF, per le parallele Ef ed IC, si ha $Ff : CF :: EF : IF$; ed Ff è doppia di CF. Dunque EF sarà doppia di IF, ossia sarà $EI = IF$. Ripresa adunque l'equazione superiore, si avrà $2RE + 2EI = AB$, ed $RE + EI = \frac{AB}{2}$, ovvero $RI = CA$.

Similmente nell' Iperbola (*Fig.* 72.) condotta TRt, la quale sia tangente della Curva nel punto R, e alzata la

RH normale alla direzione del diametro CM, ſe ſi condurrà dall' altro fuoco la fR, e dal centro C la LC parallela ad RF, i due angoli TRF ed fRT formati dalla tangente, e dalle ordinate dai fuochi al punto R, per nota proprietà dell' Iperbola, ſaranno eguali. Dovendo poi eſſere il diametro CM parallelo alla tangente RT, ſarà l' angolo $TRG = RGI$, e l' angolo $fRI = RIG$. Ma l' angolo TRF è $= IRf$. Adunque RIG ſarà $= RGI$. Per le parallele poi IF ed LC, ſaranno tra loro ſimili i due triangoli IRG ed LGC, e iſoſcele ſarà quindi il triangolo LGC, oſſia ſarà $LC = LG$. Deve poi eſſere la differenza delle ordinate dai fuochi = all' aſſe traſverſo AB, per proprietà nota dell' Iperbola. Adunque ſarà $fR - RF = AB$, oſſia $RG + GL + Lf - RF = AB$. Per eſſere poi ſimili i triangoli FRf, e CLf, ſi ha $Ff : Cf :: Rf : Lf$, ed Ff ſi trova doppia di CF. Adunque ſarà Rf doppia di RL, oſſia $RL = Lf$. Nell' Equazione adunque ſuperiore ſi potrà porre in vece di Lf il ſuo valore $RG + GL$, e riſulterà $2RG + 2GL - RF = AB$, ed $RI + GL - \frac{RF}{2} = \frac{AB}{2}$. Ma per i mentovati triangoli ſimili ſi ha ancora $Rf : Lf :: RF : LC$. Dunque ſarà $LC = \frac{RF}{2}$, e ridotti i termini dell' Equazione riſulterà $RI = CA$.

205. III. Preſo un arco infiniteſimo RN d' una Eliſſe o d' una Iperbola, e condotta Nu parallela al ſemidiametro CM, la quale tagli il raggio vettore FR in p, ed RH in $*$ e abbaſſata NE normale allo ſteſſo raggio vettore FR, e denominato P il parametro della Curva riferita agli aſſi, e ſuppoſto il rimanente come ſopra, ſi avrà $P : NE :: NE : RP$, oſſia $RP = \frac{\overline{NE}^2}{P}$ (*Fig.* 71. ; 72.).

DIMOSTRAZIONE. Essendo condotta RH normale a CS ed Nx parallela ad MS, sarà pure Nx perpendicolare ad RH. Saranno quindi simili i due triangoli Rpx, ed NpE, e perciò $Rp : Rx :: Np : NE$. Se si troverà quindi il valore di Rx, e di Np si avrà noto ancora il rapporto di $NE : Rp$.

Per proprietà fondamentale di queste due Curve deve essere $2CA : 2CD :: 2CD : P$, e $2CD = \sqrt{2CA.P}$, e $CD = \sqrt{\frac{CA.P}{2}}$. Sta poi $CM : CA :: CD : RH$ (N.203.). Dunque sarà $RH = \frac{CA\sqrt{\frac{CA.P}{2}}}{CM}$. Per la somiglianza pure dei triangoli IRH ed RPx, si ha RI, ossia $CA : RH :: Rp : Rx$. Dunque sarà $Rx = \frac{Rp\sqrt{\frac{CA.P}{2}}}{CM}$. Dai triangoli pur simili Rzx e CHR si ha pure l'analogia $RH : RC :: Rx : Rz$. Sostituiti quindi i valori già ritrovati di RH e di Rx, e ridotti i termini, si avrà $Rz = \frac{RC.Rp}{CA}$. Per i triangoli RIC, Rpz simili si ha $RI : IC :: Rp : pz$. Ma RI ed IC sono quantità finite, ed Rp infinitesima di second' ordine (N. 145.). Dunque pz sarà pure infinitamente picciola di second' ordine, e potrassi quindi confondere Np con Nz. Per natura poi delle due Curve deve essere $\overline{CR}^2 : \overline{CM}^2 :: 2CR . Rz : \overline{Np}^2$, presa VR in vece di Vz per essere

Rz

Rz infinitesima di second' ordine, ossia $\overline{Np}^2 = \frac{\overline{CM}^2 \cdot 2Rz}{CR}$, e surrogato il valore ritrovato di Rz, avrassi $\overline{Np}^2 = \frac{\overline{CM}^2 \cdot 2Rp}{CA}$ ed $Np = CM \sqrt{\frac{2Rp}{CA}}$. Ripresa quindi la primiera analogia $Rp : Rx :: Np : NE$, e fatte le convenienti sostituzioni dei valori di Rx e di Np, riducendo si avrà $Rp = \frac{\overline{NE}^2}{P}$.

206. IV. Se dai due fuochi di una Ellisse o di una Iperbola si condurranno ad un qualunque punto R di esse Curve le ordinate FR ed fR (*Fig.* 73 ; 74), e quindi dagli stessi fuochi si alzeranno le FT ed fN normali alla tangente del dato punto R, denominato P il parametro delle Curve riferite agli assi, si troverà la quarta proporzionale dopo $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$ e $\frac{P}{4}$ minore del raggio vettore FR nell' Ellisse, e maggiore nell' Iperbola.

DIMOSTRAZIONE. Sia nelle due date Curve il semiasse maggiore $= a$, il minore b, e si instituisca la proporzione $\overline{FT}^2 : \overline{FR}^2 :: \frac{P}{4} : x$, ossia facciasi $x = \frac{\overline{RF}^2 \cdot P}{4\overline{FT}^2}$. Essendo simili i due triangoli rettangoli FRT ed fRt, nei quali si trovano eguali tra loro i due angoli FRT, ed fRN, per nota proprietà di queste Curve, sarà $FT = \frac{FR \cdot fN}{fR}$. Ma in oltre $FT \times fN$ è $= b^2$, per natura della tangente, e quindi $fN = \frac{b^2}{FT}$. Sarà adunque $FT = \frac{FR \cdot b^2}{FT \cdot fR}$, ossia $\overline{FT}^2 = \frac{FR \cdot b^2}{fR}$. L' analogia adunque proposta a principio si cangierà nella seguente $\frac{b^2 \cdot FR}{fR} : \overline{FR}^2 :: \frac{P}{4} : x$, ossia $\frac{b^2}{fR} : FR :: \frac{P}{4} : x$.

Ma per proprietà fondamentale di queſte due Curve deve eſſere $a^2 : b^2 :: 2a : P$, e quindi $b^2 = \frac{aP}{2}$. Dunque ſarà $\frac{a.P}{2fR} : FR :: \frac{P}{4} : x$, oſſia $\frac{4a}{2fR} : FR :: 1 : x$, e $\frac{2a}{fR} : 1 :: FR : x$; cioè $2a : fR :: FR : x$. Ma nell' Eliſſe la ſomma delle due ordinate $FR + fR$ è eguale all' aſſe tranſverſo $AB = 2a$. Dunque ſarà $fR < 2a$, e perciò $FR > x$. Nell' Iperbola, in cui la differenza delle ordinate FR ed fR è eguale all' aſſe tranſverſo, cioè $+ fR - FR = 2a$, la ſola fR ſarà $> 2a$, e perciò ancora $x > FR$.

207. V. Preſo un qualunque punto R in una Eliſſe, o in una Iperbola, il cui aſſe ſia AB, il vertice in A, e l' un fuoco in F, ſarà ſempre il raggio vettore FR maggiore dell' intercetta tra il fuoco F, e il vertice più proſſimo A (*Fig.* 73; 74.).

DIMOSTRAZIONE. Sull' aſſe tranſverſo AB dell' Eliſſe ſi deſcriva un cerchio ALB, e dal fuoco F ſi tiri l' ordinata FR, e ſi produca finchè tagli il cerchio in L. Per proprietà del cerchio ſarà $FL < FA$. Ma la FR non può eſſere che minore di FL, ovvero eguale ad FL, il che averrà ſolo nel caſo dell' Eliſſe equilatera, in cui la Curva ottiene la maſſima ampiezza. Dunque in una Eliſſe qualunque BDA, ſarà ſempre $FR > A$.

Nell' Iperbola poi (*Fig.* 74.) condotta la RT tangente al punto R, ſarà $FT > FA$. Ma RF lato oppoſto all' angolo retto nel triangolo FRT è $> FT$. Dunque tanto più FR ſarà $> FA$.

COROLLARIO.

208. Nell' Eliſſe (*Fig.* 73.) la retta FB intercetta tra il fuoco F, ed il vertice ſupremo B dell' Aſſe AB, ſarà ſempre mag-

giore di fR. Poichè nell' Eliſſe ſi ha per nota proprietà $FR + fR = AB = FA + FB$; ma FR è $> FA$. Dunque FB ſarà $> fR$. Siccome poi tanto FR, quanto FA ed FB ſono raggi vettori delle due Curve Iperbolica ed Elittica, ſi potrà quindi dedurre, che il minimo raggio vettore nell' Eliſſe ſarà FA, che giace in diretto coll' aſſe tranſverſo BA, e va dal fuoco F al vertice più proſſimo della Curva, ed FB giacente pure ſullo ſteſſo aſſe, e ſituato tra il fuoco, e il vertice più rimoto della Curva, ſarà il maſſimo di tutt' i raggi variabili dell' Eliſſi. Nell' Iperbola poi la retta FA intercetta tra il vertice e il fuoco interiore alla Curva, ſarà il minimo raggio vettore, e vi avrà un maſſimo ſoltanto nel caſo che la Curva, e quindi FR vadano all' infinito.

TEOREMA I.

209. Ravvolgaſi un corpo in una Eliſſe o in una Iperbola con una forza centripeta tendente al fuoco F, e ſia il parametro delle due Curve riferite agli Aſſi $= P$. Se dall' eſtremo N del minimo arco RN ſi abbaſſerà la normale NE ſopra il raggio vettore FR, denominata la detta normale K e la forza centripeta G, ſarà $G = \frac{K^2}{P}$ (*Fig.* 71; 72.).

DIMOSTRAZIONE. Si conduca la Np parallela alla tangente TRt. Eſprimerà la infiniteſima Rp la forza centripeta, che agiſce nel primo iſtante ſul mobile, ſituato nel punto R della Curva (*N.* 142.). Ma Rp è $= \frac{\overline{NE}^2}{P}$ (*N.* 205.). Sarà adunque $G = \frac{K^2}{P}$.

COROLLARIO I.

210. Se si condurrà poi alla tangente RT (*Fig.* 75; 77.) la normale FT, e chiameraſſi queſta N, denominando pure il raggio vettore R e la velocità V, ſi avrà un' altra eſpreſſione della forza centripeta, cioè $G = \frac{N^2 . V^2}{P . R^2}$. Poichè ſi ricava (*N.* 153.) $NE^2 = \frac{FT^2 . V^2}{FR^2}$, oſſia $K^2 = \frac{N^2 . V^2}{R^2}$. Soſtituito adunque queſto valore, in luogo di K^2 nella eſpreſſione generale della forza centripeta, ſtabilita nel Teorema, avraſſi ancora $G = \frac{N^2 . V^2}{R^2 . P}$.

COROLLARIO II.

211. Saranno quindi le forze centripete in diverſi punti della ſteſſa Eliſſe od Iperbola reciprocamente proporzionali ai quadrati dei raggi vettori. Poichè eſſendo generalmente la forza centripeta $G = \frac{N^2 . V^2}{R^2 . P}$ (*N.* 210.), e la velocità di un mobile in qualunque punto di una Curva, il cui fuoco ſia nel concavo di eſſa, trovandoſi in ragione reciproca della normale tirata dal fuoco alla tangente, cioè $V = \frac{1}{N}$ (*N.*154.), e quindi $VV = \frac{1}{N^2}$, ſurrogato queſto valore analogo di VV nella eſpreſſione generale della forza centripeta, ſi avrà $G = \frac{1}{R^2 . P}$, e tolta la coſtante P, ſarà generalmente $G = \frac{1}{R^2}$.

COROLLARIO III.

212. Siccome poi il raggio vettore è una quantità, che di continuo ſi varia sì nell' Eliſſe che nell' Iperbola, ſarà quindi ancora la forza centripeta di continuo variabile, e ſarà maſſima nel vertice A (*Fig.* 73.), cui corriſponde il minimo raggio vettore AF, e minima nel vertice ſuperiore B, a cui corriſponde il maſſimo raggio vettore FB (*N.* 207.), e nell' Iperbola la maſſima forza centripeta ſi avrà nel vertice A, (*Fig.* 75.), in cui cade il minimo raggio vettore FA, e ſarà minima ſoltanto allorchè la Curva ſarà giunta all' infinito, e ſarà reſo pure infinito il raggio vettore.

COROLLARIO IV.

213. Si potrà ancora facilmente indicare l'eſpreſſione della velocità, che avrà il corpo in qualunque punto R di una Eliſſe, o di una Iperbola. Poichè eſſendo $G = \frac{N^2 . VV}{R^2 . P}$, ſi avrà di quì $V = R . \sqrt{\frac{G . P}{N^2}}$, e ſiccome ſi ha (*N.* 211.) $G = \frac{1}{R^2}$, ſoſtituito queſto valore analogo, e omeſſa la coſtante P, ſi avrà $V = \frac{1}{N}$, come ſi è trovato ancora generalmente per tutte le Curve (*N.* 154.).

COROLLARIO V.

214. Eſſendo variabile tuttora la normale condotta dal fuoco F alla tangente di qualſiſia punto di un' Eliſſe od Iper-

bola, ſarà pure variabile di continuo la velocità di un mobile, che ſi ravvolge in queſte Curve, la quale ci viene eſpreſſa per $\frac{1}{FT}$, oſſia per $\frac{1}{N}$ (*N.* 213.). Otterrà poi il mobile la maſſima velocità nel vertice *A* di queſte Curve più proſſimo al fuoco inferiore *F*, poichè la normale condotta alla tangente ſarà lo ſteſſo minimo raggio vettore *FA*, di cui non ſi può dare altra minor normale condotta dal fuoco *F* (*Fig.*75;77.) alla tangente di un punto della Curva. La velocità poi minima ſi troverà nell' Eliſſe nel vertice ſuperiore *B* più rimoto dal centro *F* delle forze, confondendoſi la ſuddetta normale col raggio vettore *FB* maſſimo fra tutt' i ſucceſſivi, i quali ſono maggiori delle corriſpondenti tangenti dal fuoco condotte. Nell' Iperbola poi la minima velocità del mobile ravvolgenteſi in eſſa, non ſi troverà che allorquando il raggio vettore avrà condotta la Curva ſino all' infinito. I gradi poi di velocità intermedia nell' Eliſſe ſi avranno, riſalendo il corpo dal vertice imo *A* al ſommo *B*, o in diſcendendo dal ſommo all' imo, coſicchè decreſcerà di continuo la velocità del mobile nel riſalire, creſcendo in tal caſo ſucceſſivamente il raggio vettore, mentre ſi ſcoſta eſſo mobile dal centro delle forze; ſi aumenterà poi di continuo nel diſcendere che farà verſo l'imo vertice, ſminuendoſi ſucceſſivamente il raggio vettore e la diſtanza dal fuoco *F*. Nell' Iperbola poi, avendoſi la maſſima velocità nel vertice, ſi accreſcerà la velocità del mobile nell' accoſtarſi che farà al vertice, e ſi ſminuirà quindi nel ricadere lungi da eſſo.

PROBLEMA.

215. Ravvolgaſi un corpo in una Eliſſe o in una Iperbola, e ſuppongaſi che venga a cadere da un qualſivoglia punto dell' una o dell' altra Curva con un moto accelerato dalla forza centripeta, che aveva nel dato punto di eſſe Curve: cercaſi lo ſpazio RE, che dovrà percorrere cadendo liberamente, affine di acquiſtare una velocità eguale a quella, con cui ravvolgeaſi nella data Eliſſe od Iperbola. (*F.* 73; 74.)

RISOLUZIONE. La velocità acquiſtata alla fine del moto uniformemente accelerato è proporzionale alla doppia radice dello ſpazio percorſo, moltiplicata nella forza centripeta (*N.* 86.). Denominando quindi x lo ſpazio RE, per cui deve il grave cadere, affine di ottenere la voluta velocità, ſi avrà $V = 2\sqrt{\frac{x.N^2.V^2}{P.R^2}}$, oſſia $VV = 4x.\frac{N^2.V^2}{P.R^2}$, ed $x = \frac{P.R^2}{4N^2}$ (*N.*210.), cioè lo ſpazio cercato ſarà quarta proporzionale dopo il quadrato della normale condotta dal fuoco alla tangente del dato punto della Curva, il quadrato del raggio vettore, e la quarta parte del parametro.

COROLLARIO I.

216. Eſſendo la quarta proporzionale dopo $N^2 : R^2 : \frac{P}{4}$ minore del raggio vettore nell' Eliſſe, e maggiore nell' Iperbola (*N.* 206.), il mobile cadendo da un punto R dell' Eliſſe, acquiſterà una velocità eguale a quella, che avea nel dato punto

della Curva, prima di giugnere al fuoco F, e nell' Iperbola non potrà il mobile acquiſtare la velocità ricercata, ſe non percorrendo uno ſpazio maggiore del corriſpondente raggio vettore, oſſia oltrepaſſando il fuoco F.

COROLLARIO II.

217. Supponendoſi cadere il mobile dall' uno o dall' altro vertice dell' Eliſſe verſo il centro F delle forze, la perpendicolare condotta da F alla tangente del vertice ſarà lo ſteſſo raggio vettore, e ſarà $N^{\circ} = R^{\circ}$, e quindi $\varkappa = \frac{P}{4}$. Il mobile adunque cadendo liberamente dall' uno de' vertici verſo F, allora avrà acquiſtato una velocità eguale a quella, che otteneva in ciaſcun vertice dell' Eliſſe, quando avrà percorſo uno ſpazio eguale alla quarta parte del parametro d'eſſa Curva. Lo ſteſſo ſi potrà applicare all' Iperbola, venendo a cadere il mobile dal vertice A della Curva verſo il fuoco interiore F, poichè la normale tirata dal punto F alla tangente della Curva in A, ſarà eguale al corriſpondente raggio vettore FA, e s' avrà pure in eſſa $\varkappa = \frac{P}{4}$.

COROLLARIO III.

218. Conſiderato il mobile ſituato nel punto B, oſſia nel vertice di una Eliſſe più rimoto dal centro F delle forze, per acquiſtare una velocità nel cadere verſo F, la quale ſia eguale a quella, che ottenea nello ſteſſo vertice della data Curva, dovrà cadere per uno ſpazio $< \frac{BF}{2}$. Poichè eſſendo il parametro una terza proporzionale dopo l' aſſe maggiore

giore AB ed il minore CD, ſarà il parametro $P < AB$, e $\frac{P}{4} < \frac{AB}{4}$. Ma FB è $> FA$ (*N.* 207.) Dunque ſarà $\frac{FB}{2} > \frac{AB}{4}$, e perciò s'avrà $\frac{P}{4} < \frac{FB}{2}$. Dovrà adunque il mobile cadere per uno ſpazio minore della metà di BF per acquiſtare una velocità eguale a quella, con cui ſi ravvolgeva nell' Eliſſe, trovandoſi nel vertice B di eſſa. Per lo contrario trovandoſi il mobile nel vertice A inferiore, e più proſſimo al centro F delle forze, dovrà eſſo cadere per uno ſpazio $> \frac{AF}{2}$ per acquiſtare la velocità, che aveva in A nel condurſi per l'Eliſſe. Imperocchè ſi trova dimoſtrato preſſo i Trattatiſti delle Sezioni Coniche, che il valore di $\frac{P}{4}$ è $> \frac{AF}{2}$.

COROLLARIO IV.

219. Generalmente la velocità, che avrà un corpo in qualſiſia punto di una Eliſſe alla velocità, con cui potrebbe deſcrivere nella ſteſſa diſtanza dal fuoco F un cerchio, ſarà in ragione minore di $\sqrt{2} : 1$, e in ragione maggiore nell' Iperbola. Poichè lo ſpazio della caduta del grave, affine di acquiſtare una velocità eguale a quella, che ottiene in ciaſcun punto delle due Curve, ſi è trovato $= \frac{R^2 . P}{4N^2}$ (*N.* 215.), oſſia una quarta proporzionale dopo N^2, R^2 e $\frac{P}{4}$. Ma queſta ſi è trovata ſempre minore del raggio vettore nell' Eliſſe, e maggiore nell' Iperbola (*N.* 206.), e per deſcrivere un cer-

chio intorno ad F, dovrebbe il corpo cadere per la metà del raggio (*N.* 197.). Dunque per acquiſtare la propoſta velocità per riguardo all' Eliſſe ed al cerchio, ſaranno gli ſpazj della caduta in ragione minore di $1 : \frac{1}{2}$, oſſia di $2 : 1$, e per l'Iperbola al cerchio in ragione maggiore di $1 : \frac{1}{2}$, oſſia di $2 : 1$. Ma le velocità ſono proporzionali alle radici degli ſpazj nel moto uniformemente accelerato (*N.* 77.). Adunque la velocità, con cui ſi deſcrive un' Eliſſe alla velocità, colla quale ſi deſcriverebbe un cerchio alla ſteſſa diſtanza dal fuoco F, ſarà in ragion minore di $\sqrt{2} : 1$, e la velocità, con cui ſi ravvolge un corpo nell' Iperbola a quella, colla quale ravvolgerebbeſi in un cerchio nella ſteſſa diſtanza dal centro F interiore, avrà una maggior ragione di $\sqrt{2} : 1$.

COROLLARIO V.

220. Siccome poi l'angolo formato dal raggio vettore e dalla tangente ai due vertici A e B dell' Eliſſe è retto, avendo il mobile nel vertice ſublime B una velocità minore di quella ſia richieſta per deſcrivere un cerchio col raggio BF, e maggiore nel vertice inferiore A della richieſta a condurſi per un cerchio del raggio AF (*N.* 218.), progredendo il mobile da B, ſi accoſterà al centro F delle forze, e partendo da A, ſi ſcoſterà ſucceſſivamente da eſſo (*N.* 157.). Nell' Iperbola pure, ſiccome nel vertice A ottiene il mobile una velocità maggiore di quella, colla quale potrebbe deſcrivere un cerchio intorno ad F nella ſteſſa diſtanza AF (*N.* 215.), dovrà eſſo mobile, partendo da A, ſcoſtarſi ſucceſſivamente dal centro F delle forze (*N.* 157.).

TEOREMA II.

221. Se le forze centripete di due corpi, che ſi ravvolgono in Curve Elittiche od Iperboliche, ſaranno tendenti verſo i centri *F* delle forze (*Fig.*75;76;77;78.), e la forza centripeta di un mobile in un dato punto *R* di una Curva, ſarà alla forza centripeta dell' altro in un aſſegnato punto *r* dell'altra Curva omologa, come $\frac{1}{FR^2} : \frac{1}{Fr^2}$, le forze centripete promiſcuamente preſe, ſeguiranno la ſteſſa legge in tutti gli altri punti delle date Curve, oſſia ſaranno reciprocamente proporzionali ai quadrati delle ſucceſſive diſtanze dei due mobili dal riſpettivo centro *F* delle forze.

DIMOSTRAZIONE. Per Ipoteſi la forza centripeta di un mobile in *R* alla forza centripeta dell' altro ſituato in *r* ſta come $\frac{1}{FR^2} : \frac{1}{Fr^2}$, o ſi aſſumano le due Eliſſi (*Fig.*77;78.), ovvero le due Iperbole (*Fig.* 75;76.). Ma la forza centripeta in un altro punto *M* è eſpreſſa pure per $\frac{1}{FM^2}$, e in *m* per $\frac{1}{Fm^2}$ (*N.*211.). Adunque la forza centripeta in *R* alla forza centripeta in *r*, ſarà ancora come $\frac{1}{FM^2} : \frac{1}{Fm^2}$, oſſia le dette forze preſe ancora promiſcuamente in diverſe Eliſſi od Iperbole, ſaranno inverſamente proporzionali ai quadrati delle diſtanze dei corpi da' riſpettivi centri delle forze.

TEOREMA III.

222. Se due corpi ſi ravvolgeranno in due Eliſſi *AB*, *ab* ovvero in due Iperbole *AM*, *am* con forze centripete ten-

denti al fuoco F, ſeguendo queſte forze, preſe ancora promiſcuamente, la ragione reciproca dei quadrati delle diſtanze dal centro F delle forze, oſſia dei raggi vettori, ſaranno le velocità dei due mobili, in ciaſcun punto delle accennate Curve, in ragione compoſta diretta delle radici dei parametri, e inverſa delle normali condotte dal fuoco, o centro F alle tangenti di ciaſcun punto delle Curve; e denominando gli ſteſſi elementi colle lettere maggiori in una Curva come ſopra, e colle minori nell' altra, ſi avrà generalmente $V : v :: \frac{\sqrt{P}}{N} : \frac{\sqrt{p}}{n}$.

DIMOSTRAZIONE. La forza centripeta di un mobile in qualunque punto di una Eliſſe o di una Iperbola, ci viene eſpreſſa per $\frac{N^2 . V^2}{P . R^2}$, e ſimilmente preſe le lettere minori per un' altra Eliſſe od Iperbola, ſi avrà l'eſpreſſione della forza centripeta del mobile in eſſa ravvolgenteſi $= \frac{n^2 . vv}{p . r^2}$ (*N.* 210.). Eſſendoſi poi ſuppoſte le forze centripete, preſe ancora promiſcuamente nelle date Curve, proporzionali reciprocamente ai quadrati delle diſtanze da F, oſſia dei raggi vettori, ſarà la forza centripeta di un mobile in una Eliſſe od Iperbola alla forza centripeta dell' altro, che ſi ravvolge nella ſeconda Eliſſi od Iperbola, come $\frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$. Si avrà adunque tanto per le due Eliſſi, come per le due Iperbole, l'analogia $\frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2} :: \frac{N^2 . V^2}{P . R^2} : \frac{n^2 . v^2}{p^2 . r^2}$; e quindi $V : v :: \frac{\sqrt{P}}{N} : \frac{\sqrt{p}}{n}$.

COROLLARIO.

223. Saranno ancora le infinitesime areette, percorse in eguali istanti nelle assegnate Curve, proporzionali alle radici dei parametri; cioè denominate queste areette DS e ds, s'avrà $\sqrt{P} : \sqrt{p} :: DS : ds$. Poichè essendo $V : v :: \frac{\sqrt{P}}{N} : \frac{\sqrt{p}}{n}$, sarà pure $VN : vn : \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Ma le normali N ed n moltiplicate per gl' infinitesimi archi delle Curve, che ne esprimono le velocità V ed v (*N.* 2.), ossia per le tangenti, con cui si possono i detti archi confondere (*Supp.* 2.), sono proporzionali alle infinitesime areette percorse nelle due Curve in eguali istanti. Adunque varrà l'ana- $DS : ds :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$.

TEOREMA IV.

224. Se le forze centripete tendenti ai dati fuochi F di due mobili ravvolgentisi in due Ellissi od Iperbole, seguiranno la ragione inversa e duplicata delle distanze dai predetti centri delle forze, saranno le stesse forze centripete in diretta ragione dei quadrati dei cateti NE, ne, abbassati dagli estremi degl' infinitesimi archi RN, rn sui raggi vettori FR ed Fr ed inversa dei parametri; e denominati come sopra (*N.* 209.) gli stessi elementi colle lettere maggiori in una Curva, e colle minori nell' altra, s' avrà $G : g :: \frac{K^2}{P} : \frac{k^2}{p}$. Le stesse forze saranno ancora direttamente come i quadrati delle infinitesime areette percorse in eguali istanti, e reciprocamente come i quadrati dei raggi vettori, ossia

in formola, sarà $G : g :: \frac{\overline{DS}^2}{R^2} : \frac{\overline{ds}^2}{r^2}$.

DIMOSTRAZIONE. La forza centripeta G di un mobile, che si ravvolge in una Ellisse od Iperbola è espressa generalmente per $\frac{K^2}{P}$, e similmente la stessa forza g in altra simile Curva verrà espressa per $\frac{k^2}{p}$ (*N.* 209.). Adunque per le due Ellissi, ovvero per le Iperbole, si avrà la generale analogia $G : g :: \frac{K^2}{P} : \frac{k^2}{p}$.

Si è trovato in oltre $K^2 = \frac{V^2 N^2}{R^2}$ (*N.* 209.), e quindi per un' altra simile Curva deve essere ancora $k^2 = \frac{v^2 n^2}{r^2}$. Adunque sarà $G : g :: \frac{V^2 N^2}{R^2 . P} : \frac{v^2 n^2}{r^2 p}$. Ma $V^2 \times N^2$ è eguale al quadrato dell' area infinitesima ed elementare, percorsa nella Curva a ciascun istante, ed $v^2 \times n^2$ esprime l'areetta minima percorsa nello stesso istante dal mobile nell' altra Curva (*N.* 223.). Adunque sarà $N^2 \times V^2 : n^2 \times v^2 :: \overline{DS}^2 : \overline{ds}^2$, e quindi $G : g :: \frac{\overline{DS}^2}{R^2 P} : \frac{\overline{ds}^2}{r^2 p}$, e omesse le costanti P e p, avrassi $G : g :: \frac{\overline{DS}^2}{R^2} : \frac{\overline{ds}^2}{r^2}$.

COROLLARIO.

225. Dall' analogia $G : g :: \frac{K^2}{P} : \frac{k^2}{p}$ si ricaveranno ancora di leggieri quest' altre $G : g :: \frac{K^2}{V^2 N^2} : \frac{k^2}{v^2 n^2}$, e $G : g :: \frac{K^2}{\overline{DS}^2} : \frac{k^2}{\overline{ds}^2}$. Poichè superiormente si è trovato $V : v ::$

$\frac{\sqrt{P}}{N} : \frac{\sqrt{p}}{n}$ (*N.* 222.), ossia $P : p :: V^2 N^2 : v^2 n^2$, e $P : p :: \overline{DS}^2 : \overline{ds}^2$ (*N.* 223.). Surrogati i valori analoghi di P e p, risulterà $G : g :: \frac{K^2}{V^2 N^2} : \frac{k^2}{v^2 n^2}$, e $G : g :: \frac{K^2}{\overline{DS}^2} : \frac{k^2}{\overline{ds}^2}$.

TEOREMA V.

226. Se due corpi, che si ravvolgono in due Ellissi avranno le forze centripete promiscuamente proporzionali ai quadrati delle distanze presi inversamente, i quadrati dei tempi periodici saranno proporzionali ai cubi degli assi AB ed ab; e denominati questi D e d, si avrà generalmente $T^2 : t^2 :: D^3 : d^3$.

DIMOSTRAZIONE. Dal *N.* 222. si ha l'analogia $V : v :: \frac{\sqrt{P}}{N} : \frac{\sqrt{p}}{n}$, e dal *N.* 223. $DS : ds :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Dunque varrà la proporzione $V : v :: \frac{DS}{N} : \frac{ds}{n}$. Si è trovato inoltre generalmente per tutte le Curve (*N.* 151.) $T : t :: \frac{S}{DS} : \frac{s}{ds}$. Adunque sarà $T\sqrt{P} : t\sqrt{p} :: S : s$. Ma le totali aree elittiche sono proporzionali ai rettangoli degli assi, ed i parametri sono terze proporzionali dopo l'asse transverso ed il conjugato. Dunque denominati i minori assi B e b, sarà $P = \frac{B^2}{D}$, e $p = \frac{b^2}{d}$, i quali valori introdotti nell' ultima analogia, daranno $\frac{T.B}{\sqrt{D}} : \frac{t.b}{\sqrt{d}} :: S : s :: B.D : b.d$, ossia $T : t :: D\sqrt{D} : d\sqrt{d}$, e quadrati i termini, risulterà $T^2 : t^2 :: D^3 : d^3$.

COROLLARIO I.

227. Conſiderati due cerchi deſcritti con raggi eguali alla metà dei due maggiori aſſi delle date Eliſſi, ſaranno in eſſi pure i quadrati dei tempi periodici proporzionali ai cubi degli aſſi (*N.* 195.), e quindi i tempi periodici, oſſia i tempi delle intiere rivoluzioni di due corpi negli aſſegnati cerchi, ſaranno eguali ai tempi periodici delle rivoluzioni dei corpi nelle due date Eliſſi.

COROLLARIO II.

228. Saranno ancora i tempi, in cui due corpi deſcrivono due aree finite in due Eliſſi, proporzionali alle aree ſteſſe diviſe per le radici dei parametri. Poichè avendoſi in generale l'analogia $T : t :: \frac{S}{DS} : \frac{s}{ds}$ (*N.* 151.), e $DS : ds :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$ (*N.* 223.), ſarà ancora, ſoſtituendo $T : t :: \frac{S}{\sqrt{P}} : \frac{s}{\sqrt{p}}$.

COROLLARIO III.

229. Se nelle due date Eliſſi i quadrati dei tempi periodici ſaranno proporzionali ai cubi degli aſſi, le forze centripete ſeguiranno la reciproca ragione dei quadrati delle diſtanze dai loro fuochi *F*. Imperocchè ſe con i raggi *FD* ed *Fd* ſi deſcriveranno due cerchi, valendo in eſſi la generale analogia $T^2 : t^2 :: D^3 : d^3$ (*N.* 195.), ſarà ancora $G : g :: d^2 : D^2$, oſſia $G : g :: \frac{1}{\overline{FD}^2} : \frac{1}{\overline{fd}^2}$ (*N. cit.*). Ma i punti

D e *d*

D e *d* ſono comuni tanto alle Eliſſi, quanto ai cerchi. Adunque ſaranno le forze centripete, nei due punti *D* e *d* delle date Eliſſi, nella inverſa duplicata ragione dei due raggi vettori *FD*, *fd*. Ma quando queſta legge ſi manifeſta in un punto di due Eliſſi vale generalmente per tutti gli altri punti preſi ancora promiſcuamente (*N.* 221.). Adunque ec.

TEOREMA VI.

230. Ravvolgendoſi un mobile in una Eliſſe od in una Iperbola con una forza centripeta tendente al fuoco *F* (*Fig.* 73;74.), la velocità di eſſo mobile in qualunque punto di tali Curve, ſeguirà direttamente la ragione ſemplice dell' area percorſa in un dato iſtante, e la ſudduplicata del raggio vettore *FR*, e reciprocamente la ragione ſemplice del ſemiaſſe conjugato *CD*, e la ſudduplicata della diſtanza *fR* dall' altro fuoco *f*.

DIMOSTRAZIONE. S'intenda condotta la tangente *TR* al punto *R* della Curva, a cui ſiano ordinate dai due fuochi le due rette *FR* ed *fR*, e alzata da *F* una *FT* normale alla tangente *TR* prolunghinſi le rette *fR* ed *FT*, finchè concorrano in qualche punto *P*. Egli è manifeſto, che per l'interſecazione delle due rette *fP* ed *NT* naſceranno eguali i due angoli *fRN* e *TRP*. Ma per proprietà nota di queſte due Curve, ſi trovano pure eguali gli angoli *TRF* ed *fRN*. Adunque gli angoli *FRT* e *TRP* ſaranno pure tra loro eguali, e trovandoſi retti per coſtruzione gli angoli *PTR* ed *FTR* e *TR* lato comune, ſarà $PR = FR$, e tutta la $fP = fR \pm FR$ (dovendo nell' Eliſſe la ſomma delle ordinate, e nell' Iperbola la differenza di queſte eſſere eguale all' aſſe tranſverſo *AB*).

Se ſi condurrà quindi dal centro C al punto T la retta CT per eſſere $CF = Cf$ ed $FT = TP$, ſarà pure la TC parallela ad fR ed $= \frac{fP}{2}$, oſſia eguale alla metà dell' aſſe tranſverſo, e quindi il punto T ſarà ſempre nella circonferenza di un cerchio deſcritto col centro C, e col raggio AC. Se ſi prolungheranno quindi le rette TF ed Nf, finchè vadano a concorrere nell' oppoſta periferia nei punti t ed n, condotta la tn per eſſere retti gli angoli in t ed n, ed eguali gli alterni alla retta Ff, ſaranno ſimili i due quadrilateri $FTNf$ ed $ftFn$, ed avendoſi $TN = tn$, è chiaro che ſarà pure $TF = fn$ ed $Nf = Ft$. Sarà adunque $TF \cdot Ft = Nf \cdot FT = \overline{CD}^2$ (come ſi è trovato al N. 206.). Ciò preſuppoſto, denominata come ſopra l'areetta in un iſtante aſſegnabile percorſa $= DS$, ſarà la velocità del mobile in qualſiſia punto R della Curva $= \frac{DS}{FT}$ oſſia V (N. 154.) $= \frac{DS \cdot Nf}{\overline{CD}^2}$. Eſſendoſi poi trovato $Nf = \frac{fR \cdot FT}{FR}$ (N. 206.), ſarà V^2, oſſia $\frac{\overline{DS}^2}{\overline{FT}^2} = \frac{\overline{DS}^2 \cdot \overline{Nf}^2}{\overline{CD}^4 \cdot Nf \cdot FT} = \frac{\overline{DS}^2 \cdot Nf}{\overline{CD}^4 \cdot FT} = \frac{\overline{DS}^2 \cdot fR}{\overline{CD}^4 \cdot FR}$.

COROLLARIO.

231. Siccome poi $\frac{P \cdot AB}{4} = \overline{CD}^2$, ſe s'introdurrà queſto valore nella formola ſuperiore, ſi avrà ancora l'eſpreſſione della ſteſſa velocità in altri termini, cioè $V^2 = \frac{4\overline{DS}^2 \cdot fR}{AB \cdot P \cdot FR}$.

TEOREMA VII.

232. Se le forze centripete, per cui ſi ravvolgono due

corpi in due Eliſſi *AB* ed *ab*, ſaranno provenienti da due maſſe ſituate nei loro fuochi *F* (*Fig.* 77;78.), le quali attraggano eſſi corpi con forze proporzionali a ſe direttamente ed ai quadrati delle diſtanze dai fuochi, preſi reciprocamente, le dette maſſe ſaranno in diretta ragione dei cubi degli aſſi, e inverſa dei quadrati dei tempi periodici.

DIMOSTRAZIONE. Ravvolgendo ſi due corpi in due cerchi per l'attrazione delle due date maſſe *M* ed *m*, ſituate nei loro centri, ſi è trovato valere l'analogia $M : m :: \frac{R^3}{T^2} : \frac{r^3}{t^2}$ (*N.* 200.). Se adunque con i raggi vettori *FD* ed *fd* eguali alla metà dei riſpettivi aſſi, ſi deſcriveranno due cerchi, eſſendo i ſemiaſſi *FD* ed *fd*, ovvero *R* ed *r* comuni ai cerchi ed alle Eliſſi nei punti *D* e *d*, e i tempi quindi periodici tra loro eguali (*N.*227.), la ſuddetta proporzione varrà in eſſi punti per le due Eliſſi ancora, ſupponendo che le ſteſſe maſſe appartengano ed ai due cerchi ed alle due Eliſſi, e ſi avrà per queſte ancora la conſimile analogia $M : m :: \frac{D^3}{T^2} : \frac{d^3}{t^2}$.

COROLLARIO I.

233. Se le forze centripete preſe ancora promiſcuamente in due Eliſſi, ſaranno in ragione reciproca duplicata delle diſtanze dai fuochi, o centri *F* di loro forze, le ſopraddette maſſe, ſituate in eſſi fuochi, ſaranno eguali, e potranno ambedue le Eliſſi deſcriverſi dai mobili per ciaſcuna delle due maſſe ſituata in un fuoco comune ad ambedue. Poichè eſſendo le forze centripete in duplicata reciproca ragione delle diſtanze dai fuochi, oſſia dei raggi vettori, ſarà $G : g :: r^2 : R^2$, ovvero $GR^2 = gr^2$. Ma ſi ſono in oltre poſte le maſſe

proporzionali direttamente alle ſteſſe forze centripete. Adunque ſi avrà ancora l'analogia $G : g :: \frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2}$, oſſia $GR^2 m = gr^2 M$, e quindi tolti gli equemoltiplici GR^2, e gr^2, rimarrà $M = m$.

COROLLARIO II.

234. Dalla generale analogia $M : m :: \frac{D^3}{T^2} : \frac{d^3}{t^2}$ ſi potranno dedurre i ſeguenti Corollarj: I. Che poſti eguali gli aſſi maggiori di due Eliſſi, ſaranno le maſſe come i tempi periodici inverſamente preſi, e poſti eguali i tempi periodici, ſaranno le maſſe direttamente come i cubi degli aſſi. II. Che i quadrati dei tempi periodici ſaranno come i cubi degli aſſi direttamente preſi, e reciprocamente come le maſſe. III. Che ſe i quadrati dei tempi periodici ſaranno reciprocamente come le maſſe centrali, gli aſſi maggiori delle due Eliſſi ſaranno eguali. IV. Che ſe i quadrati dei tempi periodici ſaranno in ragione diretta dei cubi degli aſſi maggiori, le maſſe ſituate nei centri ſaranno tra loro eguali.

CAPO DECIMOTERZO.

DELLA RIVOLUZIONE DEI CORPI NELLA PARABOLA

per una forza, che gli attrae al fuoco di eſſa.

LEMMI.

235. I.° DAta una Parabola qualunque *ARV*, il cui vertice ſia in *A*, ed il fuoco in *F*, ed il parametro dell'

asse $= P$, se si prenderà in essa un qualunque punto R (*Fig.79.*), e si condurrà dal fuoco l'ordinata FR e la FT normale alla tangente dello stesso punto R, e si abbasserà in seguito la RS parallela all' asse AF; il parametro P della data Curva riferita all' asse sarà $= \frac{4\overline{FT}^2}{FR}$, ed il parametro P' della stessa Curva riferita al diametro RS, si troverà $= 4FR$.

DIMOSTRAZIONE. Condotta la AT tangente al vertice della Parabola, saranno simili i due triangoli FTB ed FTA, e si potrà da essi ritrarre l'analogia $FB : FT :: FT : AF$. Ma l'angolo FBR è $= SRt$, e l'angolo FRB è pure $= SRt$. Adunque il triangolo FBR sarà isoscele, ed $FR = FB$. Si potrà adunque la superiore analogia cangiare nella seguente $FR : FT :: FT : AF$. Ma si sa essere per costruzione di questa Curva $AF = \frac{P}{4}$. Adunque si avrà $\overline{FT}^2 = FR \cdot \frac{P}{4}$, ossia $P = \frac{4.\overline{FT}^2}{FR}$.

Per proprietà primaria dei diametri secondarj della Parabola, se si condurrà Nx parallela alla tangente TRt, che tagli FR in p, ed RS in z, sarà $Nz = xz$, ed $\overline{Rz} \times \overline{4FR} = \overline{Nz}^2$. Ma Rz è l'ascissa appartenente al diametro RS ed Nz l'ordinata corrispondente. Adunque per natura di questa Curva dovrà essere il parametro della Curva riferita al diametro, cioè $P' = 4FR$.

236. II. Ritenuta la costruzione superiore, dico che le due rette Rp ed Rz saranno tra loro eguali.

DIMOSTRAZIONE. Essendosi condotta Nx parallela alla tangente RT, sarà l'angolo $TRp = Rpz$, e $tRz = pzR$. Ma i due angoli TRp e TRz sono eguali per nota pro-

prietà della Curva. Adunque ſaranno pure eguali i due angoli Rpz ed Rzp, oſſia il triangolo zRp ſarà iſoſcele, e quindi $Rp = Rz$.

237. III. Preſo nella ſteſſa Parabola l'arco RN infinitesimo, ſe dall' eſtremo N dello ſteſſo minimo arco ſi condurrà la NE normale ſull' ordinata dal fuoco F all' altro eſtremo, cioè ſopra FR, inteſa quivi pure condotta la Nx parallela a TR, dico che ſarà $Rp = \frac{\overline{NE}^2}{P}$.

DIMOSTRAZIONE. Le due rette Rz ed Rp, ſuppoſto l'arco RN infinitamente picciolo, ſaranno infinitesime di ſecond' ordine (*N.* 143.), e tale ſarà pure la pz, come dall' analogia con i lati del ſimile triangolo FRD finito, ſi può facilmente dedurre. Si potrà adunque confondere Np con Nz (*Aſs.* I. Part. II.). Ma il quadrato dell' ordinata Nz, cioè $\overline{Nz}^2$ è $= Rz.4FR$. Adunque ſarà pure $\overline{Nz}^2 = Rp.4FR$. Per i triangoli poi ſimili NEp, FTR, ſi ha $FR : FT :: Np : NE$, e quindi $\overline{FR}^2 : \overline{FT}^2 :: Rp.4FR : \overline{NE}^2$, ovvero $\overline{NE}^2 = \frac{\overline{FT}^2 . Rp.4FR}{\overline{FR}^2}$, e ſurrogato il parametro $P = \frac{4\overline{FT}^2}{FR}$ (*N.* 234.) ſi avrà $\overline{NE}^2 = Rp.P$ ed $Rp = \frac{\overline{NE}^2}{P}$.

238. IV. In una Parabola la quarta proporzionale dopo $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, e $\frac{P}{4}$ ſarà eguale all' ordinata FR dal fuoco.

DIMOSTRAZIONE. S'introduca nella propoſta analogia $\overline{FT}^2 : \overline{FR}^2 :: \frac{P}{4} : x$ il valore di P ritrovato ſuperiormente (*N.* 234.), ed avraſſi $\overline{FT}^2 : \overline{FR}^2 :: \frac{4\overline{FT}^2}{4FR} :$ al quarto termine x, che ſi troverà $= \frac{4\overline{FT}^2 . \overline{FR}^2}{\overline{FT}^2 . 4FR}$, ovvero $= FR$.

239. V. La minima di tutte le rette, che ſi poſſono condurre dal fuoco F ad un punto qualunque della Parabola, ſi è la retta AF, che connette il fuoco F col vertice A di eſſa Curva.

DIMOSTRAZIONE. Si aſſuma un qualunque punto R nella Curva diverſo dal vertice A, e ſi tiri dal fuoco F (*Fig.* 80.) l'ordinata FR, e preſa nella direzione dell' aſſe una $GA = AF$, ed abbaſſata dal punto R la normale RP, ſi compia il rettangolo $PRMG$; per nota proprietà della Parabola, ſarà l'ordinata FR eguale alla ſottodirettrice MR. Ma $PG = MR$ è ſempre maggiore di GA, oſſia di AF in tutt' i punti della Curva, eccettuato il vertice A. Adunque ſarà ſimilmente FR ſempre maggiore di AF, e quindi ſarà l'intercetta tra il vertice e il fuoco la minima di tutte le rette, che ſi poſſono condurre dal fuoco alla Curva, oſſia ſarà AF il minimo dei raggi vettori della Parabola.

TEOREMA I.

240. Ravvolgaſi un corpo in una Parabola con una forza centripeta tendente al fuoco F di eſſa (*Fig.* 79.), e ſia, come ſopra, il parametro della Curva riferita all' aſſe $= P$. Si aſſuma quindi l'infiniteſimo arco RN della Curva, e condotta dal fuoco l'ordinata FR, ſi abbaſſi la NE normale ſopra FR; denominata $NE = K$, e la forza centripeta G, ſi avrà $G = \frac{K^2}{P}$.

DIMOSTRAZIONE. Si tiri la Ns parallela alla tangente RT, che tagli FR in p; eſprimerà la Rp la forza centripeta, che ha il corpo nel punto R della Parabola (*N.* 142.).

Ma Rp si è trovata $= \frac{NE^2}{P} = \frac{K^2}{P}$ (*N.* 236.). Dunque sarà $G = \frac{K^2}{P}$.

COROLLARIO I.

241. Se si condurrà quindi alla tangente TR dal fuoco la normale FT, e chiameraſſi queſta N, denominando pure la variabile FR, ovvero il raggio vettore $= R$, la velocità V, si avrà la ſteſſa forza centripeta $G = \frac{N^2 . VV}{P . R^2}$. Poichè si è trovato (*N.* 155.) NE^2, oſſia $K^2 = \frac{N^2 . V^2}{R^2}$. Ma dal Teorema si ha $G = \frac{K^2}{P}$. Adunque ſarà ancora $G = \frac{N^2 . V^2}{R^2 . P}$.

COROLLARIO II.

242. Si avrà quindi di leggieri l'eſpreſſione pure della velocità, colla quale ſi ravvolge il corpo nella Parabola, poichè ſvolgendo la ſuperior formola $G = \frac{N^2 . V^2}{R^2 . P}$, si ricava $V = R . \sqrt{\frac{P . G}{N^2}}$.

COROLLARIO III.

243. Eſſendoſi generalmente trovato per tutte le Curve, il cui fuoco ſia nel concavo di eſſe, l'eſpreſſione della velocità $= \frac{1}{N}$ (*N.* 154.), si potrà inſtituire la ſeguente equazione $\frac{1}{N} = \frac{R}{N}\sqrt{P . G}$, da cui si ha $G = \frac{1}{R^2 . P}$, oſſia traſcu-

ſcurandoſi P, ch' è una coſtante, ſi avrà la generica formola $G = \frac{1}{R^2}$, cioè la forza centripeta in una Parabola qualunque, ſarà in ragione inverſa duplicata delle diſtanze dal fuoco, ovvero dei raggi vettori.

COROLLARIO IV.

244. Saranno quindi nella Parabola tanto la forza centripeta, quanto la velocità, oſſia la forza tangenziale, quantità continuamente varianti. Poichè la forza centripeta ſi è trovata $= \frac{1}{R^2}$, e la velocità $= \frac{1}{N}$ (*N.* 154.), le quali quantità continuamente variano nella Parabola, i cui rami s' allontanano di lor natura all' infinito. Dunque varieranſi pure, e la velocità e la forza centripeta. Siccome poi tanto il raggio vettore tirato dal fuoco al vertice A della Curva, quanto la normale condotta alla tangente dello ſteſſo vertice A, ſi confondono coll' intercetta tra il fuoco e lo ſteſſo vertice, oſſia con FA, la quale ſi è dimoſtrata la minima di tutte le rette, che ſi poſſono condurre dal fuoco alla Curva (*N.* 239.); quindi la maſſima velocità e la maſſima forza centripeta, ſi avranno nel punto, o vertice A, a cui corriſponde il minimo raggio vettore e la minima normale condotta dal fuoco alla tangente della Curva: e il mobile riſentirà la maſſima forza centripeta, appunto quando otterrà la maſſima velocità. Se ſi cercaſſe poi il luogo della minima forza centripeta e della minima velocità di un mobile, che ſi ravvolge in una Parabola, non ſi rinverrebbe queſto, che allorquando $\frac{1}{R^2}$ foſſe $= \frac{1}{\infty^2}$, ovvero

quando il raggio vettore aveſſe portata la Curva all' infinito, nel qual caſo ſarebbe pure minima la velocità, poichè l'eſpreſſione $\frac{1}{N}$ ſi ragguaglierebbe anch' eſſa a zero, divenendo infinita la normale condotta alla tangente di un punto infinitamente diſcoſto dal centro.

TEOREMA II.

245. Muovaſi un corpo qualunque in una Parabola con una forza centripeta tendente al fuoco F, e ſi ſupponga che abbandonato di repente dalla forza tangenziale, venga a cadere da un qualunque punto di eſſa Parabola con un moto accelerato verſo F dalla ſteſſa forza centripeta, che aveva nel dato punto della Curva; dico che acquiſterà eſſo una velocità eguale a quella, che ottenea trovandoſi nella Curva, quando ſarà caduto per uno ſpazio $= \frac{P.R^2}{4.N^2}$.

DIMOSTRAZIONE. La velocità acquiſtata dopo un qualunque tempo nel moto uniformemente accelerato, ci viene eſpreſſa per la doppia radice dello ſpazio percorſo moltiplicato nella forza centripeta (*N.* 86.). Il valor generale poi di queſta forza ſi è trovato $= \frac{N^2.V^2}{P.R^2}$ (*N.* 241.). Denominando quindi x lo ſpazio, che deve traſcorrere il mobile per acquiſtare la velocità ricercata, ſi avrà $V = 2\sqrt{x.\frac{N^2.V^2}{R^2.P}}$, ovvero $V^2 = 4x.\frac{N^2.V^2}{R^2.P}$ ed $x = \frac{P.R^2}{4.N^2}$.

COROLLARIO I.

246. Siccome poi nella Parabola la quarta proporzionale dopo N^2, R^2 e $\frac{P}{4}$ è eguale all' ordinata FR dal fuoco alla Curva (*N.* 238.); il mobile cadendo da qualche punto della Parabola verſo il fuoco F, non potrà acquiſtare una velocità eguale a quella, che aveva nel dato punto della Curva, ſe non all' iſtante che ſi troverà giunto al fuoco di eſſa Parabola. Se il mobile cadrà dal vertice A della Curva, confondendoſi ivi il raggio vettore R colla normale N, rimarrà $x = \frac{P}{4}$, ovvero acquiſterà la velocità ricercata, dopo di eſſere caduto per uno ſpazio eguale alla quarta parte del parametro, cioè quando ſarà giunto al fuoco, eſſendo l'intercetta FA tra il vertice e il fuoco $= \frac{P}{4}$.

COROLLARIO II.

247. La velocità quindi del mobile ravvolgenteſi nella Parabola a quella, con cui potrebbe nella ſteſſa diſtanza ravvolgerſi il dato mobile in un cerchio intorno allo ſteſſo fuoco F, conſiderato come centro delle forze, avrà preciſamente il rapporto di $\sqrt{2} : 1$. Poichè il mobile per acquiſtare la velocità, che ottiene in un dato punto della Parabola, dovrebbe cadere per l'intiero raggio vettore (*N.* 246.), quando per ottenere la velocità richieſta a percorrere il cerchio, dovrebbe cadere ſolo per la metà del raggio (*N.* 197.), e già è provato, che le velocità ſeguono la ragione ſudduplicata degli ſpazj (*N.* 86.). Eſſendo poi retto l'angolo delle

due forze attiva e tangenziale nel vertice della Curva, il mobile partendo da tal punto, ſcoſteraſſi dal luoco di eſſa (*N.*157.).

TEOREMA III.

248. Si ravvolgano due corpi in due Parabole con forze centripete tendenti ai fuochi *F* (*Fig.* 79;81.), le quali ſeguano la inverſa ragione dei quadrati delle diſtanze dai riſpettivi centri delle forze; dico che le velocità di eſſi mobili ſaranno in ragione compoſta diretta delle radici dei parametri, e inverſa delle normali condotte dai fuochi alle tangenti dei punti, che ſi vorranno conſiderare nelle due Curve; e denominando tali elementi colle lettere grandi in una Curva, come ſi è fatto di ſopra, e colle minori nell' altra, ſi avrà coſtantemente $V : v :: \frac{\sqrt{P}}{N} : \frac{\sqrt{p}}{n}$.

DIMOSRTAZIONE. La forza centripeta di un mobile, che ſi ravvolge in una Parabola *AV* è eſpreſſa per $\frac{N^2 . V^2}{R^2 . P}$ (*N.*241.), e ſimilmente nell' altra Parabola *av*, ſi potrà eſprimere per $\frac{n^2 v^2}{r^2 p}$. Venendo poi ſuppoſte le forze centripete in ragione reciproca duplicata delle diſtanze dai fuochi, oſſia dei riſpettivi raggi vettori, ſarà la forza centripeta di un mobile nella Parabola *AV* alla forza centripeta di un altro corpo, che ſi muove nella Curva omologa *av* :: $\frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$. Si avrà adunque l' analogia generale $\frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2} :: \frac{N^2 . V^2}{R^2 . P} : \frac{n^2 r^2}{r^2 p}$; oſſia $P : p :: N^2 V^2 : n^2 v^2$, donde ſi ricava la propoſta $V : v :: \frac{\sqrt{P}}{N} : \frac{\sqrt{p}}{n}$.

COROLLARIO.

249. Se ne potrà quindi inferire che le infinitesime areette percorse in eguali istanti saranno proporzionali alle radici dei parametri, e denominate, come sopra, tali areette elementari DS e ds, si avrà $DS : ds :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Poichè essendo, per il Teorema, $V : v :: \frac{\sqrt{P}}{N} : \frac{\sqrt{p}}{n}$, sarà pure $VN : vn :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Ma le normali N ed n moltiplicate per gl' infinitesimi archetti delle Curve in eguali istanti percorsi, che ci esprimono le velocità (*N.* 2.), ossia per le tangenti, che si possono confondere con i mentovati infinitesimi archi (*Ass.* I. Part.II.) ci danno prodotti proporzionali alle areette infinitesime, allo stesso istante percorse nelle due Curve. Dunque si avrà l' analogia $DS : ds :: VN : vn$, e quindi $DS : ds :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$.

TEOREMA IV.

250. Trascorrano due corpi col loro moto le due Parabole AV ed av con forze centripete reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze dai fuochi; dico che le stesse forze saranno in ragione diretta dei quadrati dei cateti abbassati dall' estremità N ed n degli archi infinitesimi RN ed rn di ciascuna Curva, sul raggio vettore condotto dal fuoco agli altri estremi R ed r, e nella inversa dei parametri; e denominando in una Curva gli stessi elementi colle lettere maggiori, come si è fatto sopra (*N.* 240.), e colle minori nell' altra, avrassi $G : g :: \frac{K^2}{P} : \frac{k^2}{p}$. Sa-

ranno in oltre le ſteſſe forze centripete direttamente come i quadrati delle infiniteſime areette percorſe in eguali iſtanti dai due mobili, e reciprocamente come i quadrati dei raggi vettori, cioè ſarà $G : g :: \frac{DS^2}{R^2} : \frac{ds^2}{r^2}$.

La forza centripeta di un mobile, che ſi ravvolge in una Parabola è eſpreſſa generalmente per $\frac{K^2}{P}$, e ſimilmente per le fatte denominazioni la forza centripeta g in un' altra ſimile Curva ſi potrà eſprimere per $\frac{k^2}{p}$ (*N.*240.). Adunque ſi avrà la generica analogia per le forze centripete dei corpi, che ſi ravvolgono in diverſe Parabole $G : g :: \frac{K^2}{P} : \frac{k^2}{p}$.

Dal *Num.* 153. ſi ricava $K^2 = \frac{N^2 V^2}{R^2}$, e quindi ancora $k^2 = \frac{n^2 v^2}{r^2}$. Introdotti adunque queſti valori nella analogia ſopra ſtabilita $G : g :: \frac{K^2}{P} : \frac{k^2}{p}$, avraſſi $G : g :: \frac{N^2 V^2}{R^2 . P} : \frac{n^2 v^2}{r^2 p}$. Ma in oltre $V^2 N^2$ ed $v^2 n^2$ ſono proporzionali ai quadrati delle areette infiniteſime ed elementari, percorſe in eguali iſtanti nelle due Curve (*N.* 249.) Adunque ſarà $G : g :: \frac{DS^2}{R^2 P} : \frac{ds^2}{r^2 p}$, e omeſſe le coſtanti P e p, ſi avrà la propoſta analogia $G : g :: \frac{DS^2}{R^2} : \frac{ds^2}{r^2}$.

COROLLARIO.

351. Avendoſi (*N.* 249.) $V : v :: \frac{\sqrt{P}}{N} : \frac{\sqrt{p}}{n}$, oſſia $V^2 N^2 : v^2 n^2 :: P : p$, ſe nella ſtabilita formola $G : g ::$

$\frac{K^2}{P} : \frac{k^2}{p}$ si sostituiranno i valori analoghi di P e p, risulterà ancora quest' altra proporzione $G : g :: \frac{K^2}{V^2 N^2} : \frac{k^2}{v^2 n^2}$, e quindi pure $G : g :: \frac{K^2}{DS^2} : \frac{k^2}{ds^2}$ (*N.* 249.).

TEOREMA V.

252. I tempi, in cui due corpi ravvolgentisi in due Parabole descrivono due qualunque aree, sono proporzionali alle aree stesse divise per le radici dei rispettivi parametri, e chiamati T e t i tempi, sarà $T : t :: \frac{S}{\sqrt{P}} : \frac{s}{\sqrt{p}}$.

DIMOSTRAZIONE. Si è trovata superiormente la generale analogia dei tempi per tutte le Curve $T : T' :: \frac{S}{DS} : \frac{s}{ds}$ (*N.*151.). Ma sta $DS : ds :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$ (*N.*249.). Adunque, fatte le convenienti sostituzioni, si avrà $T : t :: \frac{S}{\sqrt{P}} : \frac{s}{\sqrt{p}}$.

CAPO DECIMOQUARTO.

METODI PER DETERMINARE LE CURVE PARTICOLARI

che seguir devono i Projetti, nell' Ipotesi che la gravità segua la ragione inversa duplicata delle distanze dal centro delle forze.

PROBLEMA.

253. DAta la direzione e la intensità delle due forze projettile e centripeta, che rattengono un corpo in una Se-

zione Conica, e data la distanza *FR* del mobile dal centro delle forze, determinare la specie della Curva, in cui si ravvolgerà il mobile. (*Fig.* 82.)

RISOLUZIONE. Venendo data la velocità del mobile, e la forza di gravità, che risente in un dato punto della Curva, si potrà assegnare lo spazio, che dovrà percorrere esso corpo sulla direzione del raggio vettore in vigore della stessa, e costante forza centripeta, per acquistare una velocità eguale a quella, che avea nello stesso punto *R*, e sarà tale spazio $= \frac{R^2 \cdot P}{4N^2}$ (*N.*215;245.). Ora se questo spazio, che diverrà noto, si troverà eguale al raggio vettore, ossia alla distanza del mobile dal centro delle forze, la Curva sarà una Parabola, se troverassi maggiore, la Curva sarà un' Iperbola, se minore un' Ellisse, e sarà questa equilatera, se lo spazio percorso liberamente dal mobile sarà la metà precisamente del raggio vettore. Imperocchè un mobile è determinato a percorrere una Curva per le due forze centripeta e tangenziale (*N.* 142.). Ma la forza centripeta da noi si è quivi presa in ragione inversa dei quadrati delle distanze, quale si trova essere in tutte le Sezioni Coniche (*N.*211;243.). Adunque la velocità sarà quella, che determinerà la specie della Curva percorsa. Ma la velocità, con cui si ravvolge un mobile in una Parabola è eguale a quella, che si acquisterebbe da esso cadendo per l'intiero attuale raggio vettore colla stessa forza centripeta, che aveva nel dato punto della Curva (*N.* 246.), e nell' Ellisse il mobile cadente colla accennata forza centripeta acquista la stessa velocità, che aveva nell' assegnato punto della Curva prima di giugnere al centro delle forze (*N.*216.), e nell' Iperbola non è sufficiente

il

il competente raggio vettore, perchè il mobile acquisti nella caduta per esso la voluta velocità (*N.*216.), e nel Cerchio si richiede la cadura per la metà del raggio (*N.* 197.). Adunque se il valore determinato di $\frac{R^2 . P}{4N^2}$ sarà = al dato raggio vettore FR, la Curva sarà una Parabola; se sarà eguale alla metà dello stesso raggio, sarà un Cerchio; se minore, avrassi un' Ellisse; e se maggiore, un' Iperbola.

COROLLARIO I.

254. Sarà quindi facil cosa in seguito il determinare il parametro di queste Curve riferite all' asse, poichè essendo noto lo spazio, che percorrer deve il mobile sulla direzione del raggio vettore per acquistare una velocità eguale a quella, che aveva nel dato punto della Curva, colla stessa e costante forza centripeta, di cui era animato il mobile al principio della sua caduta, sarà pur noto il quoto s, che ne esprime il valore. Ma il raggio vettore R è determinato, e venendo assegnate le direzioni delle due forze, si ha noto altresì l'angolo di esse, e condotta dal centro delle forze alla direzione della forza impressa la normale $FT = N$, vien determinato in oltre un angolo retto. Non si avrà dunque che a risolvere colle regole della Trigonometria piana un triangolo, di cui si hanno noti gli angoli ed un lato, e diverrà cognita la normale dal fuoco condotta. Presa quindi l'equazione $s = \frac{R^2 . P}{4 . N^2}$, si avrà $P = \frac{4s . N^2}{R^2}$, valore espresso in quantità determinate.

COROLLARIO II.

255. Se ci verrà dato il raggio vettore FR, e l'angolo obbliquo FRT delle due forze centripeta e tangenziale, si potrà determinare la posizione ed anche la lunghezza dell' asse principale della Curva, che verrà percorsa, e potrassi in seguito descrivere col noto parametro la particolare Sezione Conica, che verrà dal mobile percorsa. Poichè primieramente se la Curva sarà una Parabola, dovendo essere, per nota proprietà di essa, l'ordinata dal fuoco, ossia il raggio vettore FR eguale a quella parte di asse, che resta compresa tra il fuoco e la tangente del dato punto R; presa (*Fig.* 79.) una $FB = FR$, la quale, partendo dal fuoco F, vada a terminare ed unirsi colla tangente RT prolungata, indicherà questa la direzione dell' asse della Parabola, che di sua natura poi non ammette alcun limite. Assumendosi quindi il parametro P, e presa $FA = \frac{P}{4}$, si avrà stabilito il vertice in A, e non si avranno che a trovare medie proporzionali tra le porzioni consecutive dell' asse prolungato da A verso F indefinitamente, ed il noto parametro, e costruirassi per punti, ed anche geometricamente la Parabola ricercata. Per le altre due Curve, cioè per l'Ellisse e per l'Iperbola, converrà prima determinare l'asse transverso di queste due Curve, per istabilirne poi la sua posizione, e descriverle col noto parametro (*Fig.* 73;74.). Per ciò ottenere, si prenda l'espressione generale della velocità di un mobile in qualunque punto di queste due Curve superiormente stabilita (*N.* 231.) $V^2 = \frac{4\overline{DS}^2 . fR}{P . AB . FR}$. Si consideri in ol-

tre, che la velocità acquiſtata alla fine del moto libero è eguale alla doppia radice dello ſpazio percorſo, moltiplicato nella forza centripeta (*N.* 86.), oſſia $V = 2\sqrt{G.S.}$, e nel noſtro caſo $V = 2\sqrt{G.RE}$, ed $V^2 = 4G.RE$. La forza poi dei corpi ravvolgentiſi in Eliſſi od Iperbole, ſi è trovata ſuperiormente $= \frac{4\overline{DS}^2}{P.R^2}$ (*N.*224.). Introdotto adunque queſto valore analogo delle forze centripete nella ſuperior formola, ſi avrà $V^2 = \frac{4\overline{DS}^2.RE}{P.R^2}$. Si inſtituiſca quindi la ſeguente equazione $\frac{4\overline{DS}^2.fR}{P.AB.FR} = \frac{4\overline{DS}^2.RE}{P.R^2}$, ridotti i termini della quale, ſi avrà riſolvendo $AB : fR :: FR : RE$. Prolungata poi FR in S, coſicchè ſia $RS = fR$, ſarà pure $FS : RS :: FR : RE$ (*N.*230.), e per converſione di ragione $FS : FR :: FR : FE$, oſſia denominando l'aſſe primario, oſſia $FS = X$, ed $FR = R$, ſarà $X : R :: R : FE$. Ma lo ſpazio RE ſi è trovato $= \frac{R^2.P}{4N^2}$ (*N.* 215.). Adunque ſarà $FE = R - \frac{R^2.P}{4.N^2}$, e $X : R :: R : R - \frac{R^2.P}{4.N^2}$. Prendendoſi perciò una terza proporzionale dopo la differenza del raggio vettore collo ſpazio, per cui deve cadere il mobile per acquiſtare una velocità eguale a quella, che aveva nel dato punto, ſuppoſta agire la ſteſſa e coſtante forza centripeta, che l'animava, ed il raggio vettore R, ſi avrà noto l'aſſe primario delle due Curve. Per determinare la poſizione dell' aſſe, oſſia l'altro fuoco, non ſi avrà che a condurre dal punto R una Rf, per modo che ſi abbia l'angolo NRf = al dato TRF, e di tale lunghezza che ſia $FR \pm fR = AB$, preſo il ſegno ſuperiore per la Eliſſe, e

l'inferiore per l'Iperbola. Trovato quindi l'asse, e determinato l'altro fuoco coll' estremo punto di *Rf*, sarà piana cosa il descrivere tali Curve col noto parametro *P*.

COROLLARIO III.

256. Se l'angolo *FRT* delle direzioni delle due forze sarà retto, il caso sarà ancora più semplice, poichè il punto *R* cadrà nel vertice della Curva, e si confonderà la tangente colla ordinata dal fuoco *F*, e la *FR* indicherà la posizione dell' asse principale. Potrassi pertanto ancor più facilmente costruire la Curva Conica, che si confarrà al caso col metodo additato (*N.* 255.). Ciò che in tal caso sarà da avvertirsi, si è, che il luogo della projezione si potrà considerare nel vertice della Curva, il qual vertice nell' Ellisse sarà l'inferiore, ossia il più vicino al fuoco, ch' è centro delle forze, se per acquistare una velocità eguale a quella, che ottiene nel dato punto *R* (*Fig.* 77.) dovrà cadere colla propria forza centripeta per uno spazio maggiore della metà di sua distanza dal fuoco predetto, ossia $> AF$, e sarà il superiore se per acquistare la velocità indicata, dovesse cadere per uno spazio minore della metà del corrispondente raggio vettore, cioè $< BF$, come è manifesto da quanto si è superiormente dimostrato (*N.* 218.).

LEMMA.

257. Data una qualunque Sezione Conica *BRN*, la direzione del cui asse sia *AF* (*Fig.* 82; 83; 84.), se si prenderà un qualunque punto *R* di essa Curva, e si condurrà dal fuoco *F* una *FT* normale alla tangente *TR*, denominato

il parametro degli affi p, e fatta la proporzione $\frac{p}{2} : FT :: FT$, ad una quarta linea FS preſa nella direzione del raggio vettore FR, ſe il fuoco cadrà nello ſpazio concavo della Curva (*Fig.* 82;83.), e nell' oppoſta direzione ſe il fuoco F ſarà eſteriore, e riſguardante il conveſſo della Curva (*Fig.*84), nel qual caſo non potrà eſſere che una Iperbola, congiunti i punti S e T colla linea TS; dico che ſarà la retta ST parallela coſtantemente ad FA.

DIMOSTRAZIONE. Sia primieramente la Curva BRN una Parabola (*Fig.* 82.) riferita all' aſſe BA, e ſia $BP = x$, ſarà per proprietà di queſta Curva la ſottotangente $CP = 2x$, e $BF = \frac{p}{4}$; e quindi $CF = x + \frac{p}{4}$ ed $FP = x - \frac{p}{4}$. Abbaſſata poi l' ordinata RP normale all' aſſe, ſarà $RP = \sqrt{px}$ ed $CR = \sqrt{px + 4xx}$, e perciò $FR = \sqrt{px + x - \frac{p}{4}}$

$= \sqrt{\frac{16x^2 + 8px + pp}{16}} = \frac{4x + p}{4}$. Per eſſere poi ſimili i triangoli CRP ed FCT, i quali hanno un angolo comune oltre il retto, ſarà $CR : CP :: CF : CT$, oſſia $\sqrt{px + 4xx} : 2x :: \frac{4x+p}{4} : \frac{4x^2 + px}{2\sqrt{px + 4xx}} = CT$. Dagli ſteſſi mentovati triangoli ſi avrà ancora l'analogia ſeguente $CR : RP :: CF : FT$, oſſia $\sqrt{px + 4xx} : \sqrt{px} :: \frac{4x+p}{4} : \frac{4x\sqrt{px} + p\sqrt{px}}{4\sqrt{px + 4xx}}$, che ſarà il valore della quarta proporzionale FT. Per condizione poi del Teorema deve valere la proporzione $\frac{p}{2} : FT :: FT : FS$,

cioè $\frac{p}{2} : \frac{4x\sqrt{px} + p\sqrt{px}}{4\sqrt{px} + 4xx} :: \frac{4x\sqrt{px} + p\sqrt{px}}{4\sqrt{px} + 4xx} : FS$, donde si avrà $FS = \frac{\overline{4x\sqrt{px} + p\sqrt{px}}^2}{16 \times px + 4xx}$ diviso per $\frac{p}{2} = \frac{16px^2 + 8p^2x^2 + p^4x}{8 \times p^2x + 4px^2}$ $= \frac{p + 4x}{8}$. Ora sarà TS parallela ad AF, se si troverà vera la proporzione seguente $CR : FR :: CT : FS$. Si paragonino i valori di questi termini, ed avrassi $\sqrt{px + 4xx} : \frac{4x + p}{4} ::$ $\frac{4x^2 + px}{2\sqrt{px + 4xx}} : \frac{p + 4x}{8}$; cioè $\frac{p + 4x}{4}\sqrt{px + 4xx} = \frac{p + 4x}{4}\sqrt{px + 4xx}$ ossia $o = o$

Essendo adunque i suddetti termini in proporzione, è manifesto che i due triangoli CFR e TSR saranno simili, e quindi TS sarà parallela ad FA.

Sia ora la Curva BRN (*Fig.* 82;83.) una Ellisse od una Iperbola riferita agli assi, e sia il semiasse $BA = a$; $AP = x$, sarà $BP = \pm a \mp x$, e l'ordinata normale $RP = \sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2d}}$, presi i segni superiori per l'Ellisse, e gl' inferiori per l'Iperbola. Essendo poi per proprietà nota della tangente nell' una e nell' altra di queste due Curve $AP : BA :: BA : CA$, sarà $CA = \frac{a^2}{x}$, e $CP = \pm CA \mp AP = \pm \frac{a^2}{x} \mp x = \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x}$. Si sa pure essere l'intercetta tra il fuoco F e il punto A, che determina il semiasse, cioè $FA = \sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}}$. Si avrà dunque $CF = \pm CA \mp FA = \pm \frac{a^2}{x}$

$\mp\sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}}$, ed $FP = \pm FA \mp AP = \pm\sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}} \mp x$. Per essere in oltre retto l'angolo in P, sarà $CR = \sqrt{\overline{PR}^2 + \overline{CP}^2} = \sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x^2}}$, ed $FR = \sqrt{\overline{RP}^2 + \overline{FP}^2} = \sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \pm\sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}} \mp x}$.

Dalla somiglianza poi dei triangoli simili CRP ed FCT si ha l'analogia $CR : RP :: CF : FT$, ovvero surrogati i valori analitici $\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x^2}} : \sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a}} :: \frac{\pm a^2}{x} \mp\sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}} : FT$, che si troverà col solito metodo

$$= \frac{\frac{\pm a^2}{x} \mp\sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}}.\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a}}}{\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x^2}}}.$$

Dagli stessi triangoli simili, si avrà ancora la seguente proporzione $CR : CP :: CF : CT$; ossia $\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \frac{\pm a^2 \mp xx}{x^2}} : \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x} :: \frac{\pm a^2}{x} \mp\sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}} : CT = \frac{\frac{\pm a^2 \mp x^2}{x} \times \frac{\pm a^2}{x} \mp\sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}}}{\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \frac{\pm a^2 \mp xx}{x^2}}}$

Dovendo essere per condizione data $\frac{p}{2} : FT :: FT : FS$ sostituito il valore analitico di FT, si troverà di leggieri

$$FS = 2 \times \frac{\pm a^2 \mp \sqrt{a^2 + \frac{ap}{2}} \sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a}}}{p \times \frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \quad \frac{\pm a^2 \mp xx}{x^2}}.$$

Sarà poi TS parallela a FA, se si troverà essere vera la seguente proporzione $CR : CT :: FR : FS$; ovvero

$$\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \cdot \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x^2}} : \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x} \times \frac{\pm a^2}{x} \sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}} ::$$

$$\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \quad \frac{\pm a^2 \mp xx}{x^2}}.$$

$$\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a}} \pm \sqrt{a \mp \frac{ap}{2} \mp x} : FS, \text{ che s'avrà quindi} =$$

$$\frac{\frac{\pm a^2 \mp x^2}{x} \cdot \pm \frac{a^2}{x} \sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2}} \sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a}} \pm \sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2} \mp x}}{\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \quad \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x^2}}}$$

$$\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \quad \frac{\pm a^2 \mp x^2}{x^2}}$$

e tolti gli equemoltiplici dal secondo e quarto termine sarà

sarà $\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \frac{\overline{\pm a^2 \mp x^2}^2}{x^2}} : 1 ::$

$\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \pm \sqrt{a \mp \frac{ap}{2} \mp x}^2} :$

$\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \pm \sqrt{a^2 \mp \frac{ap}{2} \mp x}^2}$, e liberati i due secondi

$\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \frac{\overline{\pm a^2 \mp x^2}^2}{x^2}}$.

termini dagli eguali fattori, rimarrà l'analogia seguente

$$\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \frac{\overline{\pm a^2 \mp x^2}^2}{x^2}} : 1 :: 1 : \frac{1}{\sqrt{\frac{pa^2 \mp px^2}{2a} \frac{\overline{\pm a^2 \mp x^2}^2}{x^2}}}$$

Presi quindi i prodotti dei medj ed estremi, si avrà semplificando l'equazione, $1 = 1$, ossia $0 = 0$. Verificandosi adunque l'enunciata proporzione, saranno simili i due triangoli CRF e TRS; e perciò sarà TS parallela ad FA.

PROBLEMA II.

258. Dato il raggio vettore FR, e dato l'angolo obbliquo FRT, descrivere una Sezione Conica, che abbia il fuoco interiore od esteriore in F, e che passi in R per modo, che sia RT tangente allo stesso punto R, ed abbia finalmente un parametro eguale ad una data linea p (*).

(*) Questo metodo è proposto dal Ch. Sig. Francesco Maria Zanotti nell' egregio Opuscolo: *De Viribus Centralibus*.

RISOLUZIONE. Si conduca la FT normale ad RT, e si inſtituiſca la proporzione $\frac{p}{2} : FT :: FT : FS$, e ſi prenda FS ſulla direzione di FR (*Fig.* 85;86;87.), o dall' oppoſta parte (*Fig.* 84.), e ſi tiri la TS parallela ad AF. Ciò fatto, ſi prolunghi la TR in V, e conducaſi per R la XZ per modo che formi gli angoli VRX ed FRT eguali. Preſa quindi FS da F verſo R, o la linea XZ concorrerà colla retta AF, prolungata dalla parte di X in X (*Fig.* 85.), o le ſarà parallela (*Fig.* 86.), o concorrerà colla ſteſſa direzione AF dalla parte di Z in Z (*Fig.* 87.). Preſa poi FS dalla parte oppoſta (*Fig.* 84.), concorrerà ſempre la XZ colla direzione AF dalla parte di Z in Z.

Nel primo caſo coi fuochi X ed F ſi deſcriva un' Eliſſe (*Fig.* 85.), la quale paſſi per R; nel ſecondo ſi deſcriva una Parabola (*Fig.* 86.), riferita all' aſſe FC, che abbia il fuoco in F, e che paſſi pure per R; nel terzo formiſi un' Iperbola (*Fig.* 87.), la quale abbia il fuoco interiore in F e l'eſteriore in Z, e che incontri nella ſua traccia il punto R; nel quarto caſo finalmente ſi deſcriva un' Iperbola (*Fig.* 84.), la quale abbia il fuoco interiore in Z, e che venga ad incontrare il dato punto R, il che ſi potrà facilmente eſeguire con i metodi ordinarj e meccanici della formazione di tali Curve. Queſte Sezioni Coniche così coſtruite, ſaranno quelle ſteſſe, che in ciaſcun caſo conveniva di ritrovare. Poichè, e avranno il parametro eguale alla data linea p, e ſarà RT tangente nel punto R, e in ciaſcun caſo non ſi potrà l'una all' altra ſoſtituire. Primieramente l'Eliſſe (*Fig.* 85.) deſcritta coi fuochi F ed X, e che paſſa per R, avrà RT per tangente dello ſteſſo punto R;

poichè gli angoli formati dalla tangente e dalle ordinate dai fuochi nell' Eliſſe ſono eguali. Ma in queſto caſo ſono eguali per Ipoteſi gli angoli *VRX* ed *FRT*. Adunque ſarà *RT* tangente. La ſuddetta Eliſſe, che ha i fuochi in *F* ed *X*, e che paſſa per il punto *R*, a cui *RT* è tangente, avrà pure il parametro = *p*. Imperocchè, ſe una Curva Conica paſſa per un dato punto *R*, ed ha un fuoco in *F* ed *FC* per direzione dell' aſſe, condotta *FT* normale alla tangente *RT*, e fatta *TS* parallela ad *FC*, avrà un parametro eguale ad una terza proporzionale dopo 2*FS* e 2*FT* (*Lemma preced.*). Preſo adunque il punto *F* per fuoco ed *FR* per raggio vettore, e fatta *RT* tangente al punto *R*, condotta da *F* la normale *FT*, ſarà il parametro una terza proporzionale dopo 2*FS* e 2*FT*, cioè ſarà eguale alla data linea *p*. Coſtruita pure nel ſecondo caſo (*Fig.* 86.) una Parabola riferita all' aſſe *AC* col fuoco *F* e col raggio vettore *FR*, ſarà *RT* tangente della Curva nel punto *R*, eſſendo per Ipoteſi l'angolo *FRT* = *VRX*, ch' è formato da *RT* tangente, e dalla ſottodirettrice *ZR* prolungata, come eſigge la natura della tangente nella Parabola. Condotta poi *FT* normale alla tangente *TR*, e *TS* parallela all' aſſe *AC*, ſarà ſimilmente il ſuo parametro eguale ad una terza proporzionale dopo 2*FS* e 2*FT*, cioè eguale alla data linea *p*.

Finalmente l'Iperbola coſtruita nel terzo e quarto caſo (*Fig.* 84; 87.) coi fuochi *F* ed *X*, e col dato raggio *FR* avrà ſimilmente *RT* per tangente del punto *R*, ſe ſaranno eguali gli angoli *FRT* e *ZRT* compreſi tra le ordinate dai fuochi, e la ſuppoſta tangente *RT*. Ma eſſendo per coſtruzione eguali tra loro i due angoli *FRT* ed *VRX*, ſono

pure tra di loro eguali gli angoli *FRT* e *ZRT*. Adunque sarà, sì nell' uno che nell' altro caso, la *RT* tangente dell' Iperbola nel punto *R*, la quale avrà quindi, per la stessa ragione addotta di sopra, un parametro eguale al dato *p*.

Non si potea poi nel caso, in cui si è costruita l' Ellisse, sostituire una Parabola od una Iperbola, che avessero le accennate proprietà. Poichè nell' Iperbola la tangente *TR* deve dividere per metà l'angolo formato delle due ordinate dai fuochi, per proprietà di questa Curva. Ma la linea *ZRX*, toccando l'asse dalla parte di *X* in *X* (*Fig.* 85.), non può mai concorrere coll' asse *AB* a determinare un fuoco sulla *FA* prodotta. Dunque gli eguali angoli *FRT* e *TRZ*, non potranno mai essere formati dalla tangente *TR* e dalle *FR* ed *RZ*, che siano ambedue ordinate dai fuochi dell' Iperbola. Dunque nell' accennato caso, in cui si è costruita l' Ellisse, non potevasi costruire un' Iperbola, che avesse le accennate condizioni.

Nella Parabola poi l'angolo formato dalla ordinata dal fuoco e dalla tangente, si ragguaglia all' angolo formato dalla tangente e dalla sottodirettrice prolungata, per nota proprietà di questa Curva. Ma concorrendo *ZR* colla direzione dell' asse *AB* in *X* (*Fig.* 85.), non può *ZR* essere sottodirettrice della Parabola, che abbia per asse *AC*, e passi per *R*. Dunque se una Parabola passasse per *R*, ed avesse per ordinata dal fuoco *F* la *FR*, e per tangente *RT*, essendo supposti eguali gli angoli *FRT* ed *VRX*, l'angolo formato dalla tangente e dall' ordinata dal fuoco, non sarebbe eguale all' angolo formato dalla sottodirettrice e dalla tangente prolungata. Adunque non si poteva costruire nel dato caso e coll' accennate condizioni una Parabola.

Lo ſteſſo diſcorſo vale ſimilmente a dimoſtrare, che nei due caſi, in cui ſi è coſtruita un' Iperbola (*Fig.* 84; 87.), non ſi poteva coſtruire un Eliſſe od una Parabola, e così pure nel caſo, in cui ſi è coſtrutta la Parabola (*Fig.* 86.), non ſi poteva ſoſtituire una Eliſſe od una Iperbola, che aveſſero le poſte condizioni. Adunque le Curve Coniche in ciaſcun caſo formate, e che ſoddisfanno al Problema, ſono quelle appunto, ed unicamente, che conveniva di ritrovare.

SCOLIO.

259. Se l'angolo poi *FRT* delle direzioni delle due forze foſſe retto, il Problema riuſcirebbe ancora più facile a riſolverſi (*Fig.* 88.). Imperocchè ſuppoſto retto l'angolo *FRT*, la tangente *RT* ſarà perpendicolare all' aſſe *FR*, e la normale *FT*, condotta dal fuoco alla tangente, ſi confonderà col raggio vettore *FR*, oſſia colla diſtanza del fuoco *F* dal vertice della Curva. In tal caſo il luogo della projezione ſarà il vertice ſteſſo della Curva, non potendo eſſere retto l'angolo formato dalla tangente e dal raggio vettore nelle Curve naſcenti dalla Sezione di un Cono, ſe non nei vertici di eſſe. Si determini poi la ſpecie particolare della Curva, in cui deve avvolgerſi il mobile, che ſarà una Parabola, ſe la data *FR*, oſſia l'intercetta tra il vertice e il fuoco, ſarà eguale alla quarta parte del dato parametro (*N.* 246.), e ſarà un' Eliſſe, ſe $\frac{FR}{2}$ ſarà $> \frac{p}{4}$, ed un' Iperbola, ſe ſarà $\frac{FR}{2} < \frac{p}{4}$ (*N.* 218.). Facil coſa ſarà quindi il coſtruire queſte Curve col dato parametro p, e colla data diſtanza dal vertice del fuoco *F*. Imperocchè, per la Para-

bola, essendo dato il vertice, il fuoco e la direzione dell' asse, non si avranno che a condurre ordinate normali alla direzione FR, le quali siano medie proporzionali tra le corrispondenti ascisse ed il noto parametro p. Per avere poi determinate l'Ellisse e l'Iperbola di un dato parametro nei due accennati casi, in cui si ha il vertice delle due Curve e la distanza del fuoco da esso vertice, converrà prima determinare col dato parametro il loro asse.

Per ciò ottenere, si alzi dal fuoco F una FM normale ad FR ed eguale alla metà del dato parametro $= \frac{p}{2}$, che è il valore di tale ordinata nelle due accennate Curve. Presa quindi l'espressione generale dell' ordinata nell' Ellisse e nell' Iperbola, denominata l'ascissa x, l'ordinata y, e l'asse primario a, computate le ascisse dal vertice, si avrà $y^2 = \frac{pax \mp px^2}{a}$, e sostituito in luogo di y^2 il valore di $\overline{FM}^2$, cioè $\frac{pp}{4}$, sarà $\frac{pp}{4} = \frac{pax \mp px^2}{a}$, ossia $\frac{ap}{4} = ax \mp x^2$, e $4ax - ap = \pm 4x^2$, e quindi $a = \frac{\pm 4x^2}{4x - p}$. Siccome poi x si è presa $= RF$, sarà $a = \frac{\pm 4\overline{FR}^2}{4FR - p}$. Con questo asse, e col dato parametro si costruiranno quindi di leggieri intorno al fuoco F, e col vertice in R, le determinate Sezioni Coniche, che soddisferanno ai quesiti del Problema.

TEOREMA VI.

260. Se un mobile sottomesso all' azione della gravità, la qual segua la ragione inversa duplicata delle distanze

da un dato centro F, verrà ſpinto da una qualunque data forza impreſſagli, per modo che non coſpiri però colla direzione della prima; in vigore di queſte due forze dovrà eſſo mobile avvolgerſi in una Sezione Conica intorno allo ſteſſo punto F preſo per fuoco (*Fig.* 73;74;80.).

DIMOSTRAZIONE. Un grave animato dalle due forze centripeta, ed attiva, oſſia tangenziale, deſcrive una Curva (*N.* 141.) intorno al centro delle forze. Ora ſe ſi ſupporrà data la velocità del mobile, e la intenſità della forza centripeta nel punto della projezione, ſi potrà trovare nel raggio vettore di eſſa Curva, la quantità della linea RE, che dovrebbe eſſo mobile percorrere cadendo verſo il centro F colla coſtante forza centripeta, che aveva al principio della caduta, per acquiſtare una velocità eguale a quella, che otteneva nel dato punto della Curva (*N.* 215;246.). Si inſtituiſca quindi la proporzione ſeguente $\overline{FR}^2 : \overline{FT}^2 :: RE : n$, nel cui valore quadruplicato ſi conſideri il parametro p della Curva da deſcriverſi. Ciò fatto, ſe ſi troverà che per acquiſtare l'indicata velocità, dovrà il mobile percorrere l'intiero raggio vettore, ſi deſcriva una Parabola intorno al fuoco F. Se dovrà percorrere allo ſteſſo oggetto uno ſpazio minore del raggio vettore, ſi deſcriva un' Eliſſe, e ſe maggiore, un' Iperbola, col metodo accennato ſuperiormente (*N.* 258.); dico che queſte ſaranno le Curve, in cui il mobile dovrà ravvolgerſi. Imperciocchè ſuppongaſi che un altro mobile B ſpinto nello ſteſſo punto colla ſteſſa velocità e direzione del primo mobile A, ſi ravvolga in una delle tre Curve Coniche intorno allo ſteſſo fuoco F, preſo per centro delle forze, e colla ſteſſa diſtanza da eſſo che aveva il mobile A, riſentirà queſti pure la forza di gravità reciprocamente pro-

porzionale ai quadrati delle distanze dal dato centro, e oltre all' avere nello stesso punto la stessa direzione della forza impressa, e la stessa distanza dal centro, avrà ancora una velocità eguale a quella, che acquisterebbe cadendo dal detto punto colla attuale sua, e costante forza centripeta per uno spazio, che sarebbe terza proporzionale dopo il quadrato della normale, condotta dal centro delle forze alla direzione della forza tangenziale, ed il quadrato del raggio vettore, e la quarta parte del parametro, cioè $= \frac{R^2 \cdot P}{4 \cdot N^2}$ (*N.* 215; 245.). Dunque anche il proposto primo corpo colla stessa forza centripeta operante coll' assegnata legge, e colla stessa intensità e direzione della forza tangenziale, descriverà intorno allo stesso punto o centro una Sezione Conica.

CAPO DECIMOQUINTO.

DELLA CICLOIDE E DEI PENDOLI.

PROBLEMA I.

261. ESporre la genesi della Cicloide, e stabilirne la generale equazione (*Fig.* 89.).

RISOLUZIONE. Si arruoti il cerchio *ABN* uniformemente sulla retta *ED*, incominciando dal punto *E* verso *D*, per modo che ciascun punto di esso cerchio, si venga a toccare con un punto della retta *ED*. Se si supporrà quindi che il punto *A* del cerchio lasci impressa nel piano la traccia del suo cammino, chiara cosa è a vedersi che lo stesso punto *A*, partendo da *E*, e portandosi a toccare di nuovo la retta *EB* nel punto *D*, descriverà col suo moto uniforme una

una Curva. Chiamaſi tale Curva *Cicloide* per l'accennata ſua generazione dal Cerchio, e diceſi Cicloide ordinata, quando il moto del Cerchio generatore ſulla retta *ED* ſarà ſtato co) uniforme, che la ſteſſa *ED* miſurata dal circolo ſia preciſamente eguale alla periferia del medeſimo. Che ſe il moto del circolo generatore ſarà tale, che ne riſulti diſuguaglianza tra la periferia del cerchio e la baſe *ED*, la Cicloide diraſſi allungata, ſe ſarà $ED > BTAN$, ed abbreviata ſe ſarà *ED* minore della ſteſſa periferia *BATN*.

Dalla eſpoſta geneſi di queſta Curva chiaramente ſi vede che la Cicloide ordinata avrà due rami ſimili ed eguali, cioè *AE* ed *AD*, e che il diametro del cerchio generatore ſarà la maſſima altezza di tale Curva, oſſia l'aſſe che la dividerà nei due rami accennati. Se ſi condurrà poi una qualunque *MO* parallela alla baſe *ED*, l'intercetta *MN* tra la Curva e il Cerchio generatore, avrà lo ſteſſo rapporto coll' arco *NA*, che ha la baſe *ED* a tutta la periferia del circolo generatore *BNA*. Imperocchè eſſendo eguali gli archi *MR* ed *NB*, ſaranno pure eguali e parallele le ſotteſe *BN* ed *RM*, e quindi ſarà $MN = RB$. Sta poi per natura della Curva la retta *ER* all' arco *MR*, come la baſe *ED* all' intiera periferia *MFSR*, e nella ſteſſa ragione è pure *RB* all' arco *NA*. Adunque ſarà pure *RB*, oſſia *MN* all' arco $NA :: ED : MFSR$. Denominando quindi $ED = b$, e la circonferenza del cerchio genitore $= c$, ed un qualunque arco *NA* preſo per aſciſſa $= x$, e l'ordinata $MN = y$, ſi avrà $y : x :: b : c$, oſſia $y = \frac{bx}{c}$, equazione generale alla Cicloide.

Oltre la ſuddetta equazione ſempliciſſima della Cicloide,

un' altra ſe ne può ſtabilire ricavata dagli elementi di eſſa Curva, e detta perciò Equazione differenziale, la quale pure quivi eſporremo, poichè d' eſſa ci converrà far uſo in ſeguito.

Sia la Curva FMA (*Fig.* 90.) una Cicloide, il cui cerchio generatore ſia BRA del diametro $= 2r$. La ragione di MR all' arco RA ſia quella di $b : c$, e ſi denomini $AP = x$, $PR = z$, $PM = y$, e l'arco $RA = s$. Condotte quindi la pH infinitamente proſſima a PM, e la MS parallela ad RC, ed MV parallela alla RD abbaſſata normale da R ſopra pH, ſarà $HV = dy$, $RC = ds$ e $CD = SV = dz$, ed HS, differenza tra HV ed SV, $= dy - dz$. Siccome poi per natura della Curva deve eſſere MR all' arco $RA :: b : c$, ſaranno pure nella ſteſſa ragione i loro differenziali HS ed RC, e però ſi avrà $dy - dz : ds :: b : c$, oſſia ſarà $dy - dz = \frac{b.ds}{c}$; ma RC, oſſia ds è $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e per proprietà del cerchio ſi ha RP, oſſia $z = \sqrt{2rx - xx}$; e quindi differenziando $dz = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$. Adunque ſi troverà $ds = \sqrt{\frac{dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - xx}}$; e in termini ridotti ſarà $ds = \sqrt{\frac{r^2dx^2}{2rx - xx}}$, oſſia $ds = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$. Introdotti pertanto queſti valori nell' equazione $dy - dz = \frac{b.ds}{c}$, avraſſi $dy \frac{-rdx + xdx}{\sqrt{2rx - xx}} = \frac{b.rdx}{c\sqrt{2rx - xx}}$, oſſia $dy = \frac{brdx + crdx - cxdx}{c\sqrt{2rx - xx}}$.

Se la Cicloide ſarà l'ordinaria, l'equazione ſarà più ſemplice,

essendo in tal caso $b = c$, e si avrà $dy = \frac{2rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, ossia $dy = dx\sqrt{\frac{2r-x}{x}}$, equazione ultima, e differenziale della Cicloide, di cui ci serviremo in appresso.

PROBLEMA II.

262. Determinare la sottotangente, e la tangente nella Cicloide (*Fig.* 90.).

RISOLUZIONE. Si prenda l'espressione o formola generale della sottotangente, cioè $\frac{ydx}{dy}$, e s'introduca in essa il valore di dy superiormente trovato nella equazione differenziale di questa Curva, di cui si ritengano le denominazioni, e si avrà $\frac{ydx}{\frac{2rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}} = \frac{ydx.\sqrt{2rx - xx}}{2rdx - xdx} = \frac{y\sqrt{2rx - xx}}{2r - x}$ che sarà il valore della sottotangente PN. Risolvendo quindi questo valore, avrassi $2r - x : y :: \sqrt{2rx - xx} : PN$. Ma per proprietà del cerchio si ha $2r - x : z :: z : x$, ossia $z = \sqrt{2rx - xx}$. Adunque sarà $2r - x : z :: y : PN$, e però $z : x :: y : PN$, cioè $RP : PA :: PM : PN$. Quindi la sottotangente PN ricercata, sarà una quarta proporzionale dopo l'ordinata del cerchio, l'ascissa, e l'ordinata della Cicloide ad essa ascissa corrispondente. Da quest' analogia facilmente apparisce che saranno parallele le due linee RA ed MN, e quindi per i triangoli simili RPA, ed MPN si avrà $RP : : RA :: PM : MN$, cioè la tangente ancora sarà una quarta proporzionale dopo l'ordinata del cerchio,

e la corda corrispondente all' arco RA, e l'ordinata della Cicloide. Ritrovato però il valore della sottotangente PN, si poteva col mezzo di essa assegnare ancor quello della tangente MN, che si trova $= \sqrt{PM^2 + PN^2}$, e analiticamente

$$= \sqrt{y^2 + \frac{2y^2rx - y^2x^2}{2r - x}}.$$

PROBLEMA III.

263. Trovare il raggio osculatore della Cicloide (*Fig.*91.).

RISOLUZIONE. Sia la Curva AMF una Semicicloide ordinata, di cui si è trovata l'equazione differenziale $dy = dx\sqrt{\frac{2r - x}{x}}$ (*N.* 261.). Differenziando questa equazione, presa dx costante, avrassi $ddy = \frac{dx\sqrt{x} \cdot \frac{(2r-x)^{-\frac{1}{2}}}{2} \cdot -dx}{x}$

$\frac{-dx\,\frac{x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2r-x}\,.\,dx}{2}}{x}$, o $ddy = dx \times \frac{\frac{x^{-\frac{1}{2}}\,.\,-dx}{2\sqrt{2r-x}}}{x} - \frac{dx\sqrt{2r-x}}{2\sqrt{x}}$

$= dx \times \frac{\frac{x\,.\,-dx - dx\,.\,2r - x}{2\sqrt{2rx - xx}}}{x} = \frac{dx^2 \times -x - 2r + x}{2x\sqrt{2rx - xx}} = \frac{-dx^2 \times 2r}{2x\sqrt{2rx - xx}}$

$= \frac{-dx^2\,.\,r}{x\sqrt{2rx - xx}}$. Presa quindi la formola generale del raggio osculatore, in cui sia presa la flussione dx costante, cioè

$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{-dx.ddy}$, e surrogati i valori di dy^2 e di ddy, avrassi

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{-dx.ddy} = \frac{(dx^2+\frac{2rdx^2-xdx^2}{x^{\frac{1}{2}}})^{\frac{1}{2}}}{\frac{rdx^2}{x\sqrt{2rx-xx}}} = \frac{(dx^2+2rx^{-1}dx^2-dx^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{rdx^2}{x\sqrt{2rx-xx}}} = \frac{(\frac{2rdx^2}{x^{\frac{1}{2}}})^{\frac{1}{2}}}{\frac{rdx^2}{x\sqrt{x}\sqrt{2r-x}}}$$

$$= \frac{(2rdx^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2r-x}}{rdx^2} = \frac{dx^2.2r\sqrt{2r}\sqrt{2r-x}}{r.dx^2} = 2\sqrt{4r^2-2xr},$$

che farà il valor generale del raggio osculatore ricercato.

COROLLARIO I.

264. Sarà quindi facil cosa a dedursi, che il raggio osculatore nella Cicloide ordinata, sarà tuttora $= 2BR$, cioè eguale alla doppia corda del cerchio generatore, condotta dall' estremo B del diametro al punto, in cui la circonferenza di esso cerchio viene segata dall' ordinata PM della Cicloide. Poichè condotta dallo stesso punto R la corda RA, sarà per proprietà del cerchio $BA : BR :: BR : BP$, ossia $2r : BR :: BR : 2r - x$, donde si ha $BR = \sqrt{4r^2-2rx}$, e $2BR = 2\sqrt{4r^2-2rx}$, ch' è appunto il ritrovato valore generico del raggio osculatore nella Cicloide.

COROLLARIO II.

265. Data una Cicloide qualunque ordinata, si potrà

di leggieri condurre a qualsifia punto M di essa il competente raggio osculatore. Poichè essendo retti gli angoli EMN per natura del raggio osculatore, ed ARB per proprietà del cerchio, ed avendosi RA parallela alla tangente MN (*N.* 262.), sarà l'angolo $ARP = NMR$, e quindi il residuo $BRP = CMR$, e perciò ME parallela ad RB. Ciò posto, per avere il raggio osculatore in qualunque punto M dell' assegnata Curva, non si avrà che a condurre la MP normale al diametro AB, la quale sarà l'ordinata della Cicloide, che taglierà il cerchio genitore in qualche punto R. Congiunti quindi i punti R e B colla retta RB, e tirata dal punto M una ME parallela alla corda RB ed $= 2RB$, si avrà nella retta ME il ricercato raggio osculatore della Curva nel dato punto M.

COROLLARIO III.

266. Se si daranno successivamente varj valori alla variabile x nella espressione del raggio osculatore $ME = 2\sqrt{4r^2 - 2rx}$, si potrà descrivere e determinare l'evoluta di una data Cicloide. Primieramente ponendo $x = 0$ per avere il raggio osculatore nel vertice A, si troverà $ME = 4r$, e quindi $BO = FG$, sarà $= 2r$. Se prenderassi $x = 2r$, per avere il raggio osculatore nel punto F, si troverà l'espressione del raggio $= 0$. Adunque il punto F sarà comune alla Cicloide ed alla evoluta. Prendendosi in seguito in tutt' i punti intermedj la $ME = 2RB$, e ponendola parallela alla stessa corda RB, il punto E segnerà successivamente l'evoluta della data Cicloide. Ciò presupposto, se si compirà il rettangolo $FBOG$, e col diametro $FG = BO = AB$ si descriverà un se-

micerchio *FHG*, condotta la *FH* parallela ad *RB*, ſaranno gli angoli *BFH* ed *FBR* eguali, e perciò eguali ſaranno pure gli archi e le corde *RB* ed *FH*; ma *MC* è parallela ed eguale ad *RB*. Dunque *CE* ſarà pure parallela ed eguale ad *FH*, e condotta *HE*, ſarà deſſa pure eguale ad *FC*. Ma per natura della Cicloide ordinata, ſiccome il ſemicerchio *BRA* dev' eſſere eguale alla baſe *FB*, così *MR* deve ragguagliarſi all' arco *RA*; ed *MR* è = *CB*. Adunque ſarà pure *CB* = all' arco *RA*, e quindi *FC*, oſſia *HE* = all' arco *RB*, oſſia all' arco *FH*, e il ſemicerchio *FGH* ſi troverà = *GO* = *FB*. L'evoluta adunque della ſemicicloide ordinata ſarà un' altra ſemicicloide eguale, ma inverſamente poſta. Nello ſteſſo modo ſi proverà (*Fig.* 92.) che le due ſemicicloidi *BGO* e *CgO* ſaranno l'evoluta dell' intiera Cicloide *BDC*, e congiunte nei loro vertici *B* e *C*, ad eſſa ſi ragguaglieranno. Quindi, ſe il raggio oſculatore *DO* andrà inviluppando l'evoluta *BO*, il punto *D* nel ſuo moto deſcriverà la ſemicicloide *DB*, e nello invilupparſi che farà la ſteſſa *DO* ſempre teſa ſopra l'evoluta *CgO*, il punto ſteſſo *D* deſcriverà l'altra ſemicicloide *DC*; laonde tanto l'evoluta, quanto la ſviluppata, ſaranno due eguali ſemicicloidi inverſamente poſte.

COROLLARIO IV.

267. Siccome ſi è ritrovato il raggio oſculatore della ſemicicloide nel vertice *D* = *BO* = 4*r* = 2*DA* (*N.* 266.), ſarà pure la ſottoſculatrice dell' altra ſemicicloide *OC* = 2*DA* = *OD*. Si avrà dunque la rettificazione di tutta la Cicloide *BDC*, e tale Curva rettificata ſarà = 4*DA* = 2*DO*, cioè

eguale a quattro diametri del cerchio generatore. Non solo poi si potrà avere la rettificazione di tutta la Cicloide, ma ancora di una qualunque parte di essa. Così se si volesse, a cagion d'esempio, rettificato l'arco GO, si avrebbe, per quanto si è detto di sopra, $GO = 2DO - MG$. Così pure si troverebbe $GE = 2DO - NE - GO = MG - NE$.

Lo stesso si poteva ottenere colla formola generale delle rettificazioni $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, poichè introdotto il valore di dy^2, ricavato dall' equazione della Curva $= \frac{2rdx^2 - xdx^2}{x}$ (*N.* 261.), l'espressione dell' arco cicloidale rettificato sarà la seguente $\sqrt{dx^2 + \frac{2rdx^2 - xdx^2}{x}}$, ossia $\frac{dx\sqrt{2r}}{\sqrt{x}}$, e integrando, si otterrà $2\sqrt{2rx}$. Fatto quindi $x = 2r$, sarà la semicicloide BD rettificata $= DO$, e l'intiera $= 2DO$.

PROBLEMA IV.

268. Quadrare lo spazio compreso dalla Cicloide (*Fig.* 89.).

Risoluzione. Sia data la semicicloide ADB generata dal cerchio ABN, e compiasi intorno ad essa il rettangolo $ABHO$. Chiamisi $AP = x$, $AB = 2r$, $Pm = y$, sarà $Pp = dx$ ed $rn = dy$, e per proprietà osservata nella Curva, avrassi $dy = dx\sqrt{\frac{2r - x}{x}}$ (*N.* 261.). Si conducano quindi dai punti m ed n le rette mL ed nG normali ad AH. L'espressione della quadratura dello spazio elementare $LGmn$ sarà xdy, ossia $xdx\sqrt{\frac{2r - x}{x}} = dx\sqrt{2rx - xx}$, ed $S.dx\sqrt{2rx - xx}$ darà

darà la quadratura dello ſpazio finito *ALm*. Ma $S.dx\sqrt{2rx-xx}$ eſprime pure l'area circolare *ATP*. Adunque lo ſpazio *ALM* ſarà eguale allo ſpazio *ATP*, e tutta l'area *AHD* ſi troverà eguale al ſemicerchio *ABR*. Ma il rettangolo in oltre *AHBD* è quadruplo del ſemicerchio *ATB*, poichè il rettangolo ſuddetto è eguale al prodotto della ſemiperiferia *ATB*, oſſia di *BD* nell' intiero diametro *AB*, eſſendo l'area del ſemicerchio eguale ſolo al prodotto della ſemicirconferenza nella quarta parte del diametro *AB*. Adunque lo ſpazio cicloidale *AmDB* ſarà triplo dell' area del ſemicerchio generatore, e lo ſpazio compreſo dall' intiera Cicloide *EAD* ſarà triplo dell' area del cerchio *BTAN*, da cui è generata.

DEFINIZIONE.

269. Pendolo ſi chiama un grave qualunque, ſoſpeſo per modo che poſſa oſcillare liberamente intorno al punto *A* di ſoſtegno (*Fig.* 93.). La linea *NC* parallela all' Orizzonte chiamaſi l'aſſe di oſcillazione.

TEOREMA I.

270. Un pendolo alzato dal punto *D*, in cui ſi giaceva in quiete, acquiſta ricadendo per l'arco *ND* una forza di riſalire per l'arco *DC* ſimile ed eguale ad *ND* (*Fig.* 93.).

DIMOSTRAZIONE. Il mobile caduto per l'arco *ND* avrà acquiſtato la ſteſſa velocità, che avrebbe ottenuto cadendo perpendicolarmente per l'altezza verticale *NO* (*N.* 125.). Colla velocità poi finale acquiſtata nella caduta per *NO* potrebbe riſalire nello ſteſſo tempo per l'altezza *ZC* = *ON* (*N.* 93.). Ma anche ſalendo per l'arco *DC* i ſucceſſivi de-

crementi di velocità ſono eguali ai ſucceſſivi incrementi avuti nella diſceſa per l'arco *ND*, operando la ſteſſa forza di gravità in ſenſo contrario. Adunque ec.

TEOREMA II.

271. Se due pendoli ſcorreranno per due ſimili archi di cerchio *NDC* ed *MPR*, ſaranno i tempi delle oſcillazioni in ragione ſudduplicata dei raggi *AD* ed *EP*, oſſia delle lunghezze *L* ed *l* di eſſi pendoli (*Fig.* 93; 94.).

DIMOSTRAZIONE. Si prendano le infiniteſime parti di queſti archi *Nn* ed *Mm*, dalle quali incomincia l'oſcillazione dei due pendoli. Denominando quindi *S* l'arco *ND*, ed *s* l'arco *MP*, e *T* e *t* i tempi di una oſcillazione, ſarà $Nn = DS$, ed $Mm = ds$. Eſſendo poi i tempi come le radici degli ſpazj percorſi nel moto con egual legge accelerato (*N.* 77.), ſarà l'infiniteſimo tempo *DT* della caduta per *Nn* all' iſtante *dt* della caduta per *Mm* :: $\sqrt{Nn} : \sqrt{Mm}$, ed eſſendo ſimili pure i due archetti infiniteſimi, ſarà per la fatta ipoteſi $DT : dt :: \sqrt{L} : \sqrt{l}$, e quindi $DT.\sqrt{l} = dt.\sqrt{L}$, e preſa la ſomma s'avrà $T.\sqrt{l} = t.\sqrt{L}$, e riſolvendo $T : t :: \sqrt{L} : \sqrt{l}$. Ma in oltre i tempi, in cui diſcendono i pendoli per gli archi *ND* ed *MP* ſono eguali a quelli, in cui riſalgono per gli archi *DC* e *PR* (*N.*270.). Adunque per i tempi delle oſcillazioni negli archi di cerchio, varrà la propoſta analogia $T : t :: \sqrt{L} : \sqrt{l}$.

TEOREMA III.

272. Le diſceſe per una ſemicicloide, e per qualunque

arco di essa, sono isocrone, ossia si compiono in egual tempo (*Fig.* 92.).

DIMOSTRAZIONE. Siano le rette *LZ* ed *VE* ordinate nella Cicloide *BO* all' asse *BF* del cerchio generatore *FHB*, e dai punti d' intersezione *Y* ed *H* si tirino al vertice *B* le corde *HB* ed *YB*, e s'instituisca la proporzione che segue *YB* : *FB* :: *HB* ad una quarta linea da condursi dallo stesso vertice *B* alla periferia del dato cerchio, la qual linea sia *BS*, e per il punto *S* così determinato, si conduca l'ordinata *QGS* parallela ad *EV*. Le corde *HB*, *SB*, *YB* ed *FB* saranno la metà dei corrispondenti archi *BE*, *BG*, *BZ* e *BO* della proposta Curva (*N.* 265.), ed avendosi *BY* : *FB* :: *HB* : *BS*, sarà pure *ZB* : *BO* :: *BE* : *BG*, ossia *BO* : *BG* :: *ZB* : *BE*, e prese le flussioni dei due archi *ZB* e *BE*, tali che sia *ZB* : *BE* :: *Zz* : *Ee*, si avrà pure *OB* : *GB* :: *Zz* : *Ee*. Per proprietà poi del cerchio essendo i quadrati delle corde *BH*, *BS*, *BY* e *BF* proporzionali alle ascisse *BV*, *BQ*, *BL*, *BF*, le quali moltiplicate per il diametro *FB*, danno rettangoli successivamente eguali ai quadrati delle mentovate corde, siccome si sono presi proporzionali i quadrati delle corde *BY*, *FB*, *HB* e *BS*, saranno pure in proporzione le ascisse *BL*, *BF*, *BV* e *BQ*, e per conversion di ragione sarà *BL* : *FL* :: *BV* : *VQ*, cioè le parti *FL* e *QV* saranno nella stessa ragione di *BL* : *BV*, ossia nella duplicata di *BY* : *BH*, o di *BZ* : *BE*, ovvero di *Zz* : *Ee*, cioè avrassi $\sqrt{FL} : \sqrt{QV} :: Zz : Ee$. Ma le velocità acquistate nella caduta per *FL* e per *VQ*, ossia per *OZ* e *GE*, sono pure in duplicata ragione di *FL* : *QV*, ossia :: $\sqrt{FL} : \sqrt{QV}$ (*N.*76.). Adunque le dette velocità saranno pure :: *Zz* : *Ee*. Potendosi poi considerare il moto per i minimi archi *Zz*

ed Ee come equabile, sarà il tempo della discesa per Zz al tempo della discesa per Ee :: $\frac{Zz}{\sqrt{FL}} : \frac{Ee}{\sqrt{QV}}$, ossia :: $\frac{Zz}{Zz} : \frac{Ee}{Ee}$ :: 1 : 1, e quindi il tempo della discesa di un pendolo per l' arco OB, cominciando dalla quiete in O, sarà eguale al tempo in cui cadrà similmente per GB, essendo $OB : GB :: Zz : Ee$. Adunque le discese dei corpi per una semicicloide e per qualunque arco di essa saranno isocrone.

COROLLARIO I.

273. Acquistando poi un corpo nel discendere per un dato arco di Curva, una velocità, con cui può risalire nello stesso tempo per un simile ed eguale arco di Curva (*N.* 270.), non solo le discese dei corpi per una semicicloide e per un qualunque arco di essa, ma ancora le salite per l'altra eguale semicicloide, o per un arco eguale di essa Curva, saranno isocrone, ossia le oscillazioni grandi e piccole, fatte a norma di tal Curva, compiranno si in egual tempo.

COROLLARIO II.

274. Quindi, se un pendolo verrà sospeso tra due semicicloidi OC ed OB, i cerchj generatori delle quali abbiano il diametro eguale alla metà della lunghezza del filo OD (*Fig.* 92.), cosicchè il filo oscillante si possa e tutto e in parte avvolgere intorno a ciascuna di esse, saranno isocrone le oscillazioni tutte, comecchè ineguali, ossia si compiranno in tempo eguale le grandi e le picciole oscillazioni. Imperocchè sviluppandosi il filo OD avvolto alla semicicloide BO, il punto D, ossia il centro di gravità del corpo D,

descriverà nella evoluzione del filo la semicicloide *BD*, e inviluppandosi di nuovo lo stesso filo *OD* intorno all' altra eguale semicicloide *OC*, sarà pure l'inviluppata *DC* un' altra semicicloide = *DB*, e tutta la Curva *BDC* sarà un' intiera Cicloide, il cui cerchio generatore avrà pure il diametro eguale alla semilunghezza del filo *OD* (*N.* 261.). Ma le oscillazioni di un pendolo in una Cicloide sono eguali per il Teorema. Adunque le oscillazioni del pendolo frapposto alle due semicicloidi *BO* ed *OC*, saranno isocrone o si facciano per l'intiera Cicloide *BC*, o per una qualunque parte di essa *sX*. Siccome poi accostandosi il punto *X* presso il punto *D*, in cui cade il vertice della Cicloide, il picciol arco cicloidale coincide col cerchio descritto col centro *O*, e col raggio *OD*, e ciò tanto più si verifica quanto è maggiore il raggio *OD* del cerchio, ovvero quanto è maggiore la lunghezza del filo, a cui s' attiene il corpo pendolo; quindi le oscillazioni ancora fatte in piccioli archi di grandi cerchj, si potranno assumere come isocrone, appunto come nella Cicloide interviene.

COROLLARIO III.

275. Se due pendoli si muoveranno in piccioli archi di grandi cerchj, o in archi cicloidali, i numeri delle loro oscillazioni saranno in ragione inversa dei tempi, in cui compiranno una oscillazione. Poichè tanto crescerà il numero delle oscillazioni di un pendolo, le cui oscillazioni siano isocrone, quanto sarà minore il tempo, in cui si compirà una oscillazione, e viceversa. Denominati quindi T e t i tempi di una oscillazione di ciascun pendolo, ed i nu-

meri delle oscillazioni dopo qualunque dato tempo N ed n, sarà $N : n :: t : T$,

COROLLARIO IV.

276. Le lunghezze dei pendoli sospesi in mezzo a due semicicloidi saranno come i quadrati dei tempi, in cui compiranno si le rispettive oscillazioni. Poichè i tempi delle oscillazioni fatte nei minimi archi di Cicloide, i quali si possono confondere con archi di cerchio, saranno anch' essi in ragione sudduplicata delle totali rispettive lunghezze (*N.* 271.), e varrà l'analogia $T : t :: \sqrt{L} : \sqrt{l}$. Ma le oscillazioni massime e minime si compiono in egual tempo nella Cicloide (*N.* 272.). Dunque generalmente, per le oscillazioni dei pendoli nelle Cicloidi, varrà l'analogia stabilita per i tempi delle oscillazioni nei simili archi di cerchj, cioè $T^2 : t^2 :: L : l$.

COROLLARIO V.

277. Saranno ancora le lunghezze dei pendoli oscillanti nelle intiere Cicloidi, e nei piccioli archi di grandi cerchj proporzionali ai quadrati dei numeri delle oscillazioni reciprocamente presi. Poichè si è trovato (*N.* 275.) $N^2 : n^2 :: t^2 : T^2$. Ma $L : l :: T^2 : t^2$ (*N.* 276.). Dunque sarà pure $L : l :: n^2 : N^2$.

LEMMA.

278. Trovar l'espressione generale del differenziale di un arco di cerchio (*Fig.* 95.).

RISOLUZIONE. Sia la Curva *BMA* un semicerchio, e *CM*

il raggio, e dal punto M si abbassi la normale MP ordinata al diametro BA, e si tiri la mp infinitamente prossima a PM, ed mo parallela a CA. Denominando quindi il diametro $AB = 2a$ ed $AP = x$, sarà $Pp = om = dx$ ed $MP = \sqrt{2ax - xx}$. Saranno poi simili i due triangoli CMp ed Mmo; poichè oltre essere retti i due angoli in o ed in P, si trova l'angolo $Mmo = CMp$, perchè essendo CMm retto, e gli angoli mMo ed Mmo eguali pure ad un retto, se si toglie il comune mMo, rimane $CMp = Mmo$. Si avrà dunque l'analogia $PM : CM :: om : Mm$, ossia $\sqrt{2ax - xx} : a :: dx : \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, che sarà l'espressione ricercata del differenziale di un arco. Se si farà poi il diametro $= 1$, diverrà ancor più semplice l'espressione, e sarà $Mm = \frac{dx}{2\sqrt{x - xx}}$.

TEOREMA IV.

279. Il tempo di una oscillazione di un pendolo nella Cicloide, al tempo della caduta verticale per il diametro del cerchio generatore, sta come la circonferenza dello stesso cerchio, al diametro (*Fig. 96.*).

DIMOSTRAZIONE. Sia la Cicloide FB, ed AB il diametro del cerchio generatore, e pongasi che il pendolo discenda da F in B per la verticale altezza AB. Se si condurrà quindi una ordinata NM nella Cicloide, e l'infinitamente prossima nm, denominando $AB = 1$, $AN = x$, sarà $Nn = mo = dx$, e la velocità acquistata dal mobile caduto per AN, sarà $= 2\sqrt{x}$ (*N.* 81.). Chiamando poi T il tempo della discesa dello stesso pendolo per l'arco cicloidale FB,

e t il tempo della caduta di un grave per il diametro AB, si troverà il tempetto della caduta per l'arco elementare della Cicloide, cioè $DT = \frac{Mm}{2\sqrt{x}}$ (*N.*3;125.), e l'istante della caduta del grave per Nn, cioè $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Per i triangoli simili Mom, BVN, sarà $Mm : mo :: BV : BN$, ossia $Mm : dx :: \sqrt{1-x} : 1-x$, ed $Mm = \frac{dx\sqrt{1-x}}{1-x}$. Quindi sarà $DT = \frac{dx.\sqrt{1-x}}{1-x.2\sqrt{x}} = \frac{dx.\sqrt{1}}{2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}} = \frac{dx.\sqrt{1}}{2\sqrt{x-xx}}$. Si avrà poi l'analogia $DT : dt :: \frac{dx.\sqrt{1}}{2\sqrt{x-xx}} : \frac{dx}{2.\sqrt{x}}$, ed $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}} : \frac{1}{2\sqrt{x}} :: \frac{dx}{2\sqrt{x-xx}} : \frac{dx}{2\sqrt{2}}$, ovvero $1 : 2\sqrt{x-xx} :: \frac{dx}{2\sqrt{x-xx}} : dx$. Ma $\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$ esprime il differenziale Vv dell' arco di cerchio AV (*N.* 278.). Dunque sarà $dx = \frac{Vv.2\sqrt{x-xx}}{1}$, e introdotto superiormente questo valore, si avrà $DT = \frac{Vv.\sqrt{AB}}{AB}$, e presa la somma, sarà $T = \frac{AVB.\sqrt{AB}}{AB} = \frac{AVB}{\sqrt{AB}}$. Considerato ancora il tempo t della caduta per l'intiero diametro che si trova $= \sqrt{AB}$, avrassi $T : t :: \frac{AVB}{\sqrt{AB}} : \sqrt{AB} :: AVB :: AB$, e per il tempo di una intiera oscillazione nella Cicloide $2T : t :: 2.AVB : AB$, cioè il tempo di una intiera oscillazione, al tempo della caduta verticale per il dia-

metro, ſarà come la circonferenza del cerchio genitore, al diametro di eſſo.

COROLLARIO.

280. La gravità dei corpi ſarà maggiore nei luoghi, in cui le oſcillazioni fatte da un pendolo di una determinata lunghezza ſaranno più celeri; e minore in quelli, in cui le oſcillazioni dello ſteſſo pendolo ſaranno più tarde. Poichè eſſendo coſtante la ragione dei tempi nella diſceſa dei corpi per una ſemicicloide, e per il diametro del cerchio generatore, per il Teorema, ſe ſarà più celere la caduta di un corpo per una ſemicicloide, ſarà più veloce ancora la diſceſa verticale di un grave per il diametro, e ſe ſarà più tarda la prima, dovrà per conſervarſi la ſtabilita ragione, ritardarſi il mobile cadente a perpendicolo; laonde maggiore ſarà nel primo caſo che nel ſecondo la cauſa di queſta velocità, ovvero la gravità.

PROBLEMA V.

281. Determinare la Curva della più celere diſceſa dei corpi (*Fig. 97.*).

Risoluzione. Si prenda nella ſuppoſta Curva *AR* l'archetto infiniteſimo *Mm*, e ſi conducano dagli eſtremi di eſſo le infinitamente proſſime *PM* e *pm*, e chiamiſi $AP = x$ $PM = y$. Abbaſſata quindi dal punto *M* la *Mo* parallela ad *AC*, ſarà $Pp = Mo = dx$, ed $om = dy$. Siccome poi ſi cerca nella *AR* una Curva, in cui la velocità ſia la maſſima dopo quella, che acquiſtano i corpi cadendo verticalmente, è manifeſto che queſta velocità dovrà eſſere coſtante,

laonde denominando la velocità acquiſtata nella caduta da A in $M = V$, ſi potrà (*N.97.*) fare la proporzione, come ſta una coſtante a all' archetto infinitesimo Mm; così la voluta velocità all' infinitesima dy, oſſia $a : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: v : dy$, ed il rapporto che ſi troverà tra dx e dy così determinato dalla condizione del Problema, ci darà la Curva ricercata. S'introduca il valore, oſſia la legge della gravità operante nelle minime diſtanze dalla ſuperficie della terra, e ſi avrà $a : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: 2\sqrt{S} : dy$ (*N.86.*). Fatto quindi $2\sqrt{S} = \sqrt{ax}$, ſi avrà $ady = \sqrt{ax}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ovvero $a^2 dy^2 = axdx^2 + axdy^2$, e quindi $dy^2 = \frac{axdx^2}{a^2 - ax}$ e $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a - x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax - xx}} = \frac{2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$; ma $\frac{2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$ ſi ritrova eſſere la differenza tra $\frac{adx}{2\sqrt{dx - xx}}$ ed $\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$. Adunque ſarà $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}} - \frac{(adx - 2xdx)}{2\sqrt{ax - xx}}$, e integrando s'avrà $y = \frac{S.adx}{2\sqrt{ax - xx}} - S.\frac{(adx - 2xdx)}{2\sqrt{ax - xx}}$, oſſia $y = \frac{S.adx}{2\sqrt{ax - xx}} - \sqrt{ax - xx}$. Ma $\sqrt{ax - xx}$ è il valore di una ordinata di cerchio, il cui diametro ſia $= a$, ed $\frac{S.adx}{2\sqrt{ax - xx}}$ eſprime un arco circolare (*N.278.*). Adunque ſarà (*Fig.92.*) y, oſſia $EV =$ all' arco circolare $HB - HV$ ordinata del cerchio, condotta dall' eſtremo dello ſteſſo arco. Ma nella Curva OB ſuppoſta una Cicloide ordinata, ſi ha $VH + HE + EK =$ all' arco $HB +$ l'arco HF, e tolte le quantità HE ed HB eguali, ſi ha $HV + EK = HF$ arco, proprietà della Cicloide (*N.261.*). La Curva adunque della più ce-

lere diſceſa, ſarà la ſteſſa che la Tautocrona, oſſia la Cicloide.

TEOREMA V.

282. I tempi delle oſcillazioni tanto nelle Cicloidi, quanto negli archi di cerchj ſimili, ſupponendoſi che la gravità, oſſia la forza acceleratrice, vada variando, ſaranno in ragione diretta, e ſudduplicata delle lunghezze totali di eſſi pendoli, e reciproca ſudduplicata delle forze acceleratrici.

DIMOSTRAZIONE. Suppoſta coſtante la gravità, ſi ſono trovati i tempi delle oſcillazioni nei cerchj, e nelle Cicloidi proporzionali alle radici delle lunghezze di eſſi pendoli, e ſi è ſtabilita l'analogia $T : t :: \sqrt{L} : \sqrt{l}$. (*N.* 271; 276.). Supponendoſi poi variare le forze acceleratrici, cioè le gravità, denominate queſte nei due pendoli, G e g, varrà la formola ſtabilita (*N.* 86.) $T : t :: \sqrt{\frac{S}{G}} : \sqrt{\frac{S}{g}}$; ma agli ſpazj eſpreſſi per gli archi ſi ſono ſoſtituite le lunghezze analoghe L ed l (*N.* 276.). Adunque varrà la generale analogia $T : t :: \sqrt{\frac{L}{G}} : \sqrt{\frac{l}{g}}$.

PROBLEMA VI.

283. Data la lunghezza di un pendolo, e dato il numero delle oſcillazioni iſocrone, che eſſo compie in un dato tempo, aſſegnare qual lunghezza debba avere un altro pendolo, di cui ſi abbia noto il numero delle oſcillazioni, che compie nello ſteſſo aſſegnato tempo.

RISOLUZIONE. Preſa l'analogia generale ſtabilita ſupe-

riormente (*N.* 277.) $N^2 : n^2 :: l : L$, non si avrà che a ricavare dai primi tre termini, che sono noti, il quarto, e si avrà sciolto il Problema. Così, a cagion d'esempio, sapendosi per l'esperienze fatte dal Huggenio che un pendolo della lunghezza di tre piedi ed otto linee, compie un' oscillazione in un minuto secondo, si troverà di leggieri la lunghezza di un altro pendolo, che compirà due oscillazioni nello stesso tempo, facendo la proporzione 4 : 1 :: 152 : linee al quarto termine x, che si troverà = 38 linee. Un pendolo adunque, che compirà due oscillazioni in ogni secondo, avrà la lunghezza di tre pollici e due linee. Con tale metodo il Sig. Gallileo osservando in una Chiesa le oscillazioni di una lampana in piccioli archi, seppe determinare l'altezza della Volta, da cui pendeva.

COROLLARIO.

284. Dato ancora il numero delle oscillazioni isocrone, che si compiono da un pendolo di una data lunghezza in un dato tempo, si potrà determinare il numero delle oscillazioni isocrone, che deve compire nello stesso tempo un altro pendolo di una determinata lunghezza. Poichè presa la stessa analogia trovata di sopra (*N.* 277.), cioè $L : l :: n^2 : N^2$ dai tre primi termini si dovrà ricavare l'incognita $N^2 = \frac{n^2 l}{L}$ ossia $N = \sqrt{\frac{n^2 l}{L}}$. Così, a cagion d'esempio, se si cercasse qual numero di oscillazioni debba compiere un pendolo della lunghezza di 38 linee in un secondo, valendoci della stessa esperienza fatta dall' Huggenio, si avrà l'equazione

che ſegue $N = \sqrt{\frac{152}{38}} = 2$, cioè nel tempo, che il pendolo lungo 152 linee, compirà un' oſcillazione, due ſe ne faranno dall' altro pendolo della lunghezza di 38 linee.

CAPO DECIMOSESTO.

DELLA PERCOSSA.

PROBLEMA I.

285. ASſegnare l'eſpreſſione generale della quantità del moto di due corpi, che vengono a percuoterſi ſulla ſteſſa retta, con moto ſecondo o contrario.

RISOLUZIONE. Si chiamino le maſſe dei due corpi M ed m, e le velocità ad eſſi competenti V ed v; ſarà MV la quantità di moto dell' un corpo, ed mv quella del ſecondo (*N.* 9.); e la total ſomma avanti l'urto ſarà $MV+mv$; e la differenza $MV-mv$. Nell' incontro poi dei due corpi ſulla ſteſſa retta, o la parte di moto perduta dall' un corpo ſi aggiugnerà all' altro, ſe s'incontreranno venendo dalla ſteſſa parte (*Aſs.* II. Part. II.), o ſi elideranno eguali quantità di moto, ſe l'urto ſi farà a parti contrarie (*N.* 35.). La ſomma adunque dei due momenti parziali nel primo caſo, e la differenza di queſti nel ſecondo ci darà l'intiera quantità di moto dei due corpi dopo l'urto, oſſia la generale eſpreſſione ricercata ſarà $MV \pm mv$, preſo il ſegno ſuperiore per l'urto coſpirante nella ſteſſa direzione, e l'inferiore per l'urto contrario (*).

(*) La Teoria del moto dei corpi, che ſi percuotono vicendevolmente, ſi deve principalmente ai celebri Matematici Wallis, Wren ed Huggens.

COROLLARIO I.

286. Siccome poi i corpi collidentisi agiranno tra loro, fino a tanto che la velocità di ciascuno dopo l'urto divenga comune ed eguale; quindi si avrà la comune loro velocità dividendo la totale quantità di moto per le masse, e sarà espressa generalmente per $\frac{MV \pm mv}{M+m}$. La velocità perduta dal corpo M, che dev' essere eguale alla primiera che aveva meno la comune si troverà espressa per $V - \frac{(MV \pm mv)}{M+m} = \frac{mV \mp mv}{M+m}$. La velocità acquistata dal corpo m si troverà pure $= \frac{MV \pm mv}{M+m} \mp v = \frac{MV \mp Mv}{M+m}$.

COROLLARIO II.

287. Il cangiamento quindi di velocità nel corpo M alla variazione di essa velocità nel corpo m, sarà :: $mV \mp mv : MV \mp Mv$, ossia :: $m \times V \mp v : M \times V \mp v$ :: $m : M$, ossia saranno i cangiamenti di velocità reciproci alle masse.

COROLLARIO III.

288. Se la velocità del corpo m avanti l'urto si trovasse infinitesima, od anche $= o$, si avrebbe $mv = o$, e quindi l'espressione della comune velocità sarebbe $\frac{MV}{M+m}$, e la velocità acquistata in tal caso del corpo m, ossia la perduta da M, si troverebbe $= \frac{mV}{M+m}$. Se si supporrà in oltre

che

che il corpo m quieto ſia di una infinita grandezza, l'eſpreſſione della comune velocità ſi troverebbe $= \frac{MV}{M+\infty}$, oſſia $= \frac{1}{\infty}$, cioè ſi ridurrebbe la velocità d'entrambi $= 0$.

COROLLARIO IV.

289. Se le maſſe ſaranno reciproche alle velocità, cioè ſe ſarà $M : m :: v : V$, nell' urto contrario dei due corpi ceſſerà ogni moto.

COROLLARIO V.

290. Se s'intenderà ſopraggiunta ai due corpi M ed m una comune velocità qualunque, ſi troverà pure in tal caſo la velocità acquiſtata dall' un corpo, e perduta dall' altro la ſteſſa, che ſi era trovata, non eſſendoſi ſopraggiunta tale velocità. Poichè denominata A la comune velocità ſopraggiunta, coſicchè le velocità competenti ai due corpi avanti l'urto ſiano $A + V$ ed $A \pm v$, l'eſpreſſione della comune velocità ſarà ancora $\frac{M.\overline{A+V} + m.\overline{A \pm v}}{M+m} = A \frac{+MV \pm mv}{M+m}$; ma la velocità perduta dall' un corpo dev' eſſere eguale alla primiera che aveva, meno la comune. Sarà adunque l'eſpreſſione della velocità perduta dal corpo $M = A + V - A \frac{-MV \mp mv}{M+m} = \frac{mV \pm mv}{M+m}$ appunto come ſi è trovato di ſopra, non eſſendoſi ſopraggiunta velocità alcuna. La velocità poi acquiſtata dall' altro corpo, che dev' eſſere eguale alla comune, meno la ſua primiera, ſi troverà $= A \frac{+MV \pm mv}{M+m}$

$-A \mp v = \frac{MV \mp Mv}{M+m}$ espressione eguale alla generale assegnata di sopra (*N.* 286.).

COROLLARIO VI.

291. Si vede quindi come un moto comune niente altera il moto relativo, di cui sono affetti i due corpi, e che lo stesso effetto si avrà, se i due corpi si muoveranno su d'un piano stabile, oppure sopra un piano, il quale muovasi uniformemente sulla medesima direzione del moto dei due corpi.

PROBLEMA II.

292. Ricavare sinteticamente i valori della comune velocità, con cui muoveransi i due corpi *M* ed *m* dopo l'urto fatto dalla stessa, o da contraria parte; della velocità acquistata dal corpo *m*, e della velocità perduta dal corpo *M*, di cui suppongasi maggiore il momento avanti la percossa.

Risoluzione. Supponganſi partire i due corpi dai punti *M* ed *m*, e che s'incontrino nel punto *O*, e siano perciò le velocità di essi espresse colle rette *MO* ed *mO*, le quali siano poste o dalla stessa parte di *O* (*Fig.* 98.), ovvero a parti contrarie (*Fig.* 99.), secondocchè cospirano avanti l'urto, oppure si oppongono i moti dei due corpi. Si divida la retta *Mm* nella reciproca delle masse, cosicchè sia *C* il centro di loro gravità. Ciò presupposto, dico che sarà *OC* la comune velocità dopo l'urto; e sarà *mC* la velocità acquistata dal corpo *m*; ed *MC* la perduta da *M* dopo l'incontro. Poichè movendosi primieramente i corpi sulla stessa

direzione, e dalla ſteſſa parte colle velocità V ed v proporzionali alle rette MO ed mO, ſarà $MV + mv = M.MO + m.mO = M.\overline{MC + OC} + m.\overline{OC - mC}$ ed $\frac{MV \pm mv}{M+m} = \frac{M.\overline{MO+OC} + m.\overline{OC-mC}}{M+m}$. Ma per Ipoteſi ſi ha $M.MC = m.mC$. Adunque nel primo caſo dell' urto diretto, diſtrutti i termini elidentiſi, ſarà l'eſpreſſione della comune velocità $= \frac{M.OC + m.OC}{M+m} = OC$. Nel ſecondo caſo poi dell' urto fatto a contraria parte, ſarà $\frac{MV - mv}{M+m} = \frac{M.\overline{MC+OC} - m.\overline{mC-OC}}{M+m} = \frac{M.OC + m.OC}{M+m} = OC$. La velocità quindi, che s'acquiſterà dal corpo m, di leggieri ſi troverà $= OC \mp mO = mC$, preſo il ſegno ſuperiore nel caſo del moto diretto alla ſteſſa parte, e l'inferiore per il moto contrario. La velocità finalmente perduta dal corpo M nell' incontro dovrà eſſere eguale alla differenza tra la primiera, che aveva eſpreſſa per MO, e la comune, con cui ſi muovono i corpi dopo l'urto eſpreſſa per OC. Sarà dunque l'eſpreſſione della velocità perduta da $M = MO - OC = MC$.

COROLLARIO.

293. Se il punto C veniſſe a cadere nel punto O d'incontro, coincidendo il punto O col centro di gravità C, è chiaro che nel caſo dell' urto contrario, ſarebbe tolta tutta la velocità dei due mobili, poichè la comune loro velocità eſpreſſa per $MO.M - mO.m$, eſſendo $MO.M = m.mO$ (*N.* 12.), ſvanirebbe riducendoſi la formola $= 0$.

SCOLIO.

294. Colle formole ſtabilite, e coll' accennato metodo ſintetico, ſi potranno ſciogliere tutt' i Problemi della percoſſa diretta, nell' Ipoteſi che i corpi che ſi urtano a vicenda ſiano perfettamente duri o molli, e l'uno ſi preſti e obbediſca intieramente alla forza dell' altro. Reſta ora a vederſi coſa debba avvenire, ſe i corpi percuotentiſi ſaranno perfettamente elaſtici, e ſi reſtituiranno dopo l'incontro e la compreſſione colla ſteſſa forza, con cui ſono eſtrinſecamente compreſſi.

TEOREMA I.

295. Se le maſſe di due corpi M ed m ſaranno perfettamente elaſtiche, le variazioni delle velocità nei due corpi ſaranno doppie di quelle ſi avrebbero nell' Ipoteſi ch' eſſi corpi foſſero incompreſſibili o molli (*Fig.* 100; 101.).

DIMOSTRAZIONE. Concorrano i due corpi, o dalla ſteſſa parte con moto ſecondo (*Fig.* 100.), o da oppoſta con moto contrario (*Fig.* 101.) nel punto O, e ſiano le competenti velocità V ed v proporzionali alle rette MO ed mO, e le maſſe ſituate in M ed m nella ragione di $mC : MC$. Manifeſta coſa è che il corpo M perderà nell' urto una parte di ſua velocità, in qualunque Ipoteſi dei corpi ancora perfettamente duri, e tale perduta velocità potrà eſprimerſi per la retta PM. Suppoſti poi i corpi perfettamente elaſtici, il corpo m, urtato e compreſſo, riagirà in oltre contro M, con una forza eguale a quella, colla quale ſarà ſtato ſpinto da M, e perciò lo ſteſſo corpo M

rispinto in parte contraria alla direzione di sua velocità da una forza espressa per PM, perderà ancora per tal riazione del corpo m una parte di sua velocità $= PM$, presa da P verso M, o da M verso P, secondocchè il moto risulterà progressivo, o retrogrado nello stesso corpo M dopo l'urto, ossia l'intiera velocità perduta nell' urto sarà $= 2PM$, doppia cioè di quella, che avrebbe perduta, non supposti i corpi perfettamente elastici.

Similmente il corpo m acquisterà per l'urto di M una nuova velocità, che potrà essere espressa per PM, e restituendosi dalla compressione colla forza di sua elasticità eguale alla comprimente del corpo M, riceverà per la riazione di M (*Ass.* V. Part. I.), un' altra parte di velocità espressa per PM, e la totale velocità, di cui s'investirà m nell' incontro fatto alla stessa o da contraria parte, nell' Ipotesi di una perfetta elasticità, sarà doppia di quella avrebbe ottenuto nell' Ipotesi dei corpi perfettamente duri.

COROLLARIO I.

296. Nell' Ipotesi quindi dei corpi perfettamente elastici si dovranno raddoppiare le formole assegnate di sopra pel moto dei corpi perfettamente duri o molli, e la velocità perduta dal corpo M nell' urto, che superiormente si era trovata $= \frac{mV \mp mv}{M+m}$, fatta l'Ipotesi di una perfetta elasticità, sarà $= \frac{2m.(V \mp v)}{M+m}$, e la velocità residua ad esso corpo M, e comune, si troverà $= \frac{MV - mV \pm 2mv}{M+m}$. La velocità poi acquistata dall' altro corpo m, che prima, nell' Ipotesi di una

perfetta durezza, ſi era trovata $= \frac{MV \mp Mv}{M+m}$, dovendo i cangiamenti di velocità eſſere doppj nella fatta Ipoteſi, ſarà $= 2M.\frac{(V \mp v)}{M+m}$; e la velocità totale di eſſo corpo m, ſi troverà quindi $= \frac{2M(V \mp v)}{M+m} \pm v = \frac{2MV \pm mv \mp Mv}{M+m}$.

COROLLARIO II.

297. Riaſſumendo pure le eſpreſſioni ſintetiche ſtabilite di ſopra (*N.* 292.) la velocità perduta dal corpo M in queſta Ipoteſi (*Fig.* 98; 99.) ſarà $= 2MC$; e la reſidua, e comune $= MO - 2MC$. Similmente la acquiſtata velocità da m ſi dovrà prendere $= 2.mC$; e la totale velocità ad eſſo competente ſarà $= mO + 2.mC$.

COROLLARIO III.

298. La quantità di moto rimarrà la ſteſſa nei due corpi avanti, e dopo l'urto, appunto come ſi è trovato nell' Ipoteſi dei corpi perfettamente duri. Poichè moltiplicandoſi la velocità di ciaſcuno dei corpi M ed m per le competenti maſſe, ſi avrà primieramente per il corpo M l'eſpreſſione della quantità di moto $= \frac{\overline{MV - mV \pm 2.mv} \times M}{M+m}$, ed allo ſteſſo modo ſi avrà per l'altro corpo m l'eſpreſſione di ſuo momento $= \frac{m \times \overline{2MV \pm mv \mp Mv}}{M+m}$, e ſommati, e ridotti i termini, ſi troverà per l'intiera quantità di moto dei due corpi M ed m l'eſpreſſione $\frac{M^2V + MmV \pm Mmv \pm m^2v}{M+m}$, il quoto

di cui, fatta l'attual diviſione, ſarà $MV \pm mv$, eſpreſſione della totale quantità di moto dei due corpi M ed m, ſuppoſti perfettamente elaſtici, come appunto ſi è trovato (*N.*285.) nella Ipoteſi di una perfetta durezza.

COROLLARIO IV.

299. Se ſaranno eguali le maſſe dei due corpi, cioè $M = m$, la velocità del corpo M dopo l'urto, rimarrà $= \pm v$; e la velocità di $m = V$, oſſia ſi cambieranno reciprocamente le loro velocità. Poichè la velocità del corpo M dopo l'incontro ſi ha $= \frac{MV - mV \pm 2mv}{M+m}$ (*N.* 296.). Ma nella fatta Ipoteſi ſi ha $MV = mV$. Adunque rimarrà ſoltanto $= \frac{\pm 2mv}{M+m} = \pm v$. Similmente la velocità del corpo m dopo l'incontro, ſi è trovata (*N. cit.*) $= \frac{2MV \pm mv \mp Mv}{M+m}$. Diſtruggendoſi adunque i termini eguali $\pm mv \mp Mv$, ſi ridurrà $= \frac{2MV}{2M} = V$.

COROLLARIO V.

300. Quindi dati più corpi elaſtici di egual maſſa diſpoſti a diverſe diſtanze nella ſteſſa retta, e poſti tutti in quiete, toltone il primo, la velocità di queſto paſſerà all' ultimo, reſtando tutti gl' intermedj in quiete; poichè il primo corpo ricambierà la ſua velocità col ſecondo, la velocità di cui ſi è ſuppoſta $= 0$, ed il ſecondo col terzo, la cui velocità pure è $= 0$. Adunque reſtando fermi i due primi, paſſerà il moto e la velocità al terzo, e così di ſeguito ſi trasfonderà ſempre la velocità nell' ultimo, reſtando gli anteriori

in quiete. Siccome poi tutto ciò deve accadere qualunque ſiano le diſtanze intermedie, ſe ſi intenderanno queſte ſminuite oltre ogni limite, oſſia ſe i corpi verranno in contatto gli uni cogli altri, per l'impulſo del primo non ſi muoverà ſimilmente che l'ultimo, rimanendo tutti gl' impellenti in quiete.

COROLLARIO VI.

301. Generalmente perchè reſti in quiete il corpo M, e perchè s'abbia quindi $\frac{MV - mV \pm 2mv}{M+m} = 0$, dovrà eſſere $M - m : 2m :: \pm v : V$, la qual proporzione varrà nel caſo dell' urto diretto, e coſpirante ſe ſarà $m < M$, e nel caſo dell' urto fatto a contrarie parti ſe ſarà $M < m$, dovendo reſtare gli antecedenti delle due proporzioni affetti dello ſteſſo ſegno. Perchè reſti poi in quiete il corpo m dopo l'incontro, dovrà valere queſt' altra proporzione $M - m : 2M :: V : \pm v$, il che non potraſſi verificare nel caſo che il moto dei due corpi reſti coſpirante, ſe non quando ſia $v < V$, ed $m < M$; e nel caſo dell' incontro fatto a contrarie parti, ſe non ſi abbia $m > M$.

COROLLARIO VII.

302. Riſolvendoſi l'eſpreſſione della velocità acquiſtata dal corpo m, cioè $\frac{2.M(V \mp v)}{M+m}$, ſi vedrà di leggieri eſſere queſta una quarta proporzionale dopo la ſomma delle due maſſe, la doppia maſſa del primo, e la differenza o la ſomma delle velocità, con cui s'incontrano i due corpi. E' quindi manifeſto, che ſe il corpo m ſi ſupporrà quieto avanti l'in-

l'incontro, la velocità da esso acquistata sarà $= \frac{2MV}{M+m}$; e similmente se verrà proposto un terzo corpo N, che colla stessa velocità $\frac{2MV}{M+m}$ debba essere mosso dal secondo, si troverà la sua velocità dopo l'urto $= \frac{2m}{m+N} \times \frac{2MV}{M+m}$. Che se il corpo M colla velocità V si fosse incontrato col terzo N senza l'interposizione del corpo m, la velocità di N si sarebbe trovata $\frac{2MV}{M+N}$. Essendo poi proporzionali geometricamente i termini seguenti, cioè $\frac{2m}{m+N} \times \frac{2MV}{M+m} : \frac{2MV}{M+N} :: 2M + 2N : M + N + m + \frac{NM}{m}$, ossia $:: M + N : m + \frac{NM}{m}$, la velocità acquistata dal corpo N nell' incontro diretto ed immediato col corpo M, sarà maggiore o minore di quella, che otterrebbe interposto il corpo m, secondochè la quantità $m + \frac{NM}{m}$ sarà $>$ ovvero $<$ di $M + N$.

Se si porrà $M = m$, ed $N = n$, sarà $M + N = m + \frac{NM}{m}$. Che se sarà $M < m$, fatto $m = M + x$, sarà $\frac{NM}{m} = \frac{mN - Nx}{m} = N - \frac{Nx}{m}$. Preso quindi m, ossia $M + x > N$, sarà $m + \frac{MN}{m} > M + N$; poichè sostituito il valore di $\frac{MN}{m}$, avrassi $m + N - \frac{Nx}{m} > M + N$, ovvero $mm + mN - Nx > Mm + Nm$, ed $mm - Nx > Mm$, e per essere $m = M + x$, sarà $\overline{M+x} \cdot \overline{M+x} - Nx > M(M+x)$, ossia $\overline{Mx + xx} > Nx$ ed $M + x > N$.

Ma si è posto $M + x$, ossia $m > N$. Dunque sarà vera la proporzione di disuguaglianza maggiore proposta, cioè $m + \frac{NM}{m} > M + N$. Lo stesso si proverà ancora, se si supporrà $M = m + x$, ed $n < M - x$. Adunque se il corpo intermedio sarà nello stesso tempo maggiore del primo e del terzo, ovvero minore, la velocità acquistata dal terzo N sarà minore essendo interposto il dato corpo m, di quella avrebbe acquistato per un immediato incontro col primo M. Se poi le masse saranno eguali, la velocità acquistata da N sarà eguale in tutti e due i casi, cioè o vi s' interponga il corpo m di eguale massa, ovvero se riceva l' urto immediatamente dal primo M.

COROLLARIO VIII.

303. Dati quattro corpi M, m, N, n di qualsivoglia massa (*Fig.* 102.), e tutti posti in quiete, tolto che il primo M, si troverà che la velocità del secondo m per l' urto, che riceve dal primo, sarà $= \frac{2MV}{M+m}$; e così la velocità acquistata dal terzo N per l' impulso di m, sarà $= \frac{2M}{m+N} \times \frac{2mV}{M+m}$. La velocità del quarto n per l' urto, che riceve da N, affetto della suddetta velocità, sarà espressa per $\frac{2N}{n+N} \times \frac{2m}{m+N} \times \frac{2MV}{M+m}$. Che se il primo M si fosse incontrato immediatamente nel quarto n, la velocità di questo sarebbe stata $= \frac{2MV}{M+n}$. Varrà poi in generale la proporzione $\frac{2MV}{M+n} : \frac{2N \cdot 2m \cdot 2MV}{N+n \cdot m+N \cdot M+m}$

:: $\overline{N+n} \cdot \overline{m+N} \cdot \overline{M+m} : 4mN \cdot \overline{M+n}$. Quindi se i quattro corpi M, m, N, n saranno supposti di egual massa, oppure se sarà $M=m$ ed $N=n$, avrassi $\overline{N+n} \cdot \overline{m+N} \cdot \overline{M+m} = 4mN \cdot \overline{M+n}$; e la velocità trasfusa immediatamente dal primo M all' ultimo n, sarà eguale a quella, che riceverebbe lo stesso corpo n, passando il moto per gl' intermedj m ed N.

Se sarà $m=n$, ed $N>n$ la ragione delle due velocità si ridurrà più semplice, omessi gli equemoltiplici $M+n$ ed $M+m$, e ridotta rimarrà :: $Nn+2Nn+nn : 4Nn$, ossia :: $NN+nn : 2Nn$. Ma supposte le quantità N ed n disuguali, la somma dei due quadrati è maggiore della somma dei due rettangoli, che ne sono la differenza. Adunque in tale Ipotesi ancora, sarà la velocità trasfusa dal primo immediatamente nel terzo, maggiore della velocità passata per gl' intermedj m ed N.

COROLLARIO IX.

304. Se i proposti corpi saranno in geometrica proporzione crescente o decrescente, espressi perciò dalla serie 1, m, m^2, m^3, m^4 ec., e chiameransi V la velocità del primo, da cui tutti gli altri debbono direttamente, e per ordine essere mossi, sarà la velocità del secondo $= \frac{2.V}{1+M}$ (*N.* 302.); quella del terzo $= \frac{2.2.V}{(1+m)^2}$; del quarto $= \frac{2.2.2.V}{(1+m)^3}$; e chiamato in generale il numero dei corpi $=n$, la velocità, con cui l'ultimo moverassi dal suo luogo, sarà $= \left(\frac{2}{1+m}\right)^{n-1} V$.

Se il primo ſi foſſe incontrato nel quarto, ſenza dover urtare gl'intermedj, la velocità di queſto ſarebbe ſtata $= \frac{2.V}{1+m'}$, e fatto il paragone tra le due velocità acquiſtate nel primo e nel ſecondo caſo, cioè tra $\frac{2.2.2.V}{1+m'}$ e $\frac{2.V}{1+m'}$ col metodo anteriormente uſato, ſi troveranno tali velocità tra loro nello ſteſſo rapporto di $1+m' : \frac{\overline{1+m}^{3}}{4}$, oſſia di $3+4m' : 3m+3m'+m' :: 1+m' : m+m^{3}$. La velocità adunque acquiſtata dal quarto corpo per l'incontro diretto del primo, ſenza l'interpoſizione di altri, ſarà minore di quella avrà acquiſtato il mobile medeſimo, ricevendo il moto ſucceſſivamente dai due corpi intermedj, le maſſe dei quali ſiano in geometrica progreſſione; poichè preſi quattro termini di eſſa, la ſomma degli eſtremi $1+m'$ ſi trova tuttora maggiore della ſomma dei medj $m+2$.

COROLLARIO X.

305. Colle formole ſtabilite ſi potranno pure aſſegnare in generale le leggi del conflitto dei corpi imperfettamente elaſtici. Poichè ſupponendo che la forza di compreſſione ſtia alla forza, colla quale ſi reſtituiſcono i corpi alla lor forma, come $a : b$, la velocità del corpo M dopo l'urto diretto con un altro corpo m fatto alla ſteſſa od a contraria parte, che nel caſo di una perfetta elaſticità ſi è trovata $= V \frac{\mp 2m(V \mp v)}{M+m}$ (*N.* 296.), ſarà nella fatta generale Ipoteſi $= V \frac{\mp m.(V \mp v)}{M+m} \frac{\mp a.m(V \mp v)}{b} \frac{}{M+m} = \frac{b.MV \pm \overline{a \pm b} \times mv - amV}{b.\overline{M+m}}$.

Similmente la velocità acquiſtata dal corpo m, che nel caſo dei corpi perfettamente elaſtici ſi era trovata $= 2M.\frac{(V \mp v)}{M+m}$, ſarà nella fatta Ipoteſi $= M.\frac{(V \mp v)}{M+m} + \frac{a}{b}.M.\frac{(V \mp v)}{M+m}$, e unendo la velocità acquiſtata alla propria, ſi avrà pure la totale velocità di eſſo corpo $m = \pm v + \frac{M.(V \mp v)}{M+m} + \frac{a}{b}.M.\frac{(V \mp v)}{M+m}$ $= \frac{\overline{a+b} \times MV \pm b.mv \mp a.Mv}{b.\overline{m+M}}$. Allo ſteſſo modo ſi potranno ſtabilire tutte le variazioni della velocità dei corpi comunque, e imperfettamente elaſtici, i quali vengano ad urtarſi ſulla ſteſſa direzione con moto coſpirante o contrario, e data in particolare la ragione della elaſticità dei corpi, che per mezzo di diligenti ſperienze ſi potrà indagare, ſi avranno ancora le particolari, e determinate eſpreſſioni della velocità di ciaſcun corpo dopo la percoſſa.

CAPO DECIMOSETTIMO.

DEI CENTRI DI GRAVITA'

DETERMINATI COL CALCOLO SOMMATORIO, E DELLA REGOLA GULDINIANA.

PROBLEMA I.

306. TRovare il centro di gravità (*) di qualſivoglia data Curva (*Fig.* 103.).

(*) Nelle grandezze omogenee, le cui parti ſi ſuppongano dotate di qualche forza tendente a un dato centro, il centro della gravità coincide con quello della grandezza.

RISOLUZIONE. S'intenda diviſa la propoſta Curva AR nei ſuoi elementi Mm, e dal punto M ſi abbaſſi la MP normale alla retta AF, a cui ſia riferita la Curva. Denominando l'arco $AM = s$, ed il ſuo elemento $= ds$, ſe ſi moltiplicherà queſt' elemento per la ſua diſtanza dalla retta AF, oſſia per $PM = y$, ſarà yds il momento di queſto elemento, ed $S.yds$ la ſomma di tutt' i momenti della Curva AR per rapporto ad AF. Dividendoſi quindi la ſomma di tutt' i momenti, cioè $S.yds$ per la ſomma degli elementi, cioè per $S.ds$, o per il ſuo integrale s, ſi avrà la ricercata diſtanza del centro di gravità (*N.* 8; 9.) della propoſta Curva per rapporto ad AF, e chiamata tale diſtanza u, ſi avrà la formola generica $u = \frac{S.yds}{s}$.

Se la Curva foſſe riferita ad un fuoco F, fatta $FM = y$, e chiamato l'angolo $MFP = x$, ed il raggio $= r$, per il triangolo rettangolo MPF, ſi avrà l'analogia $r : sen.x :: y : PM$, oſſia ſarà $PM = \frac{y.sen.x}{r}$. Surrogato adunque in luogo di y il valore ritrovato di PM nella ſuperior formola $u = \frac{S.yds}{s}$, avraſſi per le Curve riferite ad un fuoco la formola $u = \frac{S.sen.x.y.ds}{r.s}$. Se ſi troverà in ſeguito la diſtanza dello ſteſſo centro per rapporto ad un' altra retta AT normale ad AF, ſi verrà a determinare nel punto G il ricercato centro di gravità dalla interſezione di due rette BL ed HO, condotte parallele alle due date, e colla aſſegnata riſpettiva diſtanza.

COROLLARIO.

307. Se la propoſta Curva foſſe un arco *MBN* (*Fig.*104.) di cerchio, il cui raggio $= a$, condotta la corda *MN*, e l'infinitamente proſſima *mn*, ſe ſi abbaſſerà dal centro *A* la normale *AB*, dividendo queſta per metà tutte le corde del dato arco, ſaremo certi che in qualche punto della retta *AB* ſi troverà il centro di gravità del dato arco, per determinare il quale non ſi avrà che a ricercare la ſua diſtanza dal punto *A* ſulla retta *AB*. Chiamando l'arco $MB = s$, $PM = y$, ſarà l'elemento $Mm = ds$, ed $Mo = dy$. Eſſendo poi ſimili i due triangoli *Mom* ed *MPA*, ſi avrà l'analogia $Mm : Mo :: MA : MP$, oſſia $ds : dy : a : y$, e quindi $y.ds = ady$. Introdotto queſto valore nella formola generale $\frac{S.yds}{s}$, ſi avrà $u = \frac{S.ady}{s}$, oſſia $u = \frac{ay}{s}$. Fatta perciò la proporzione $s : y :: a : v$, oſſia l'arco *MB* : al ſeno *MP*, come il raggio alla ricercata diſtanza, ſi avrà determinato ſulla retta *AB* il centro di gravità del propoſto arco. Se l'arco *MN* foſſe una ſemicirconferenza, ſi avrebbe l'analogia che ſegue, come ſta il quadrante al raggio, così il raggio alla ricercata diſtanza del centro dal vertice *A*. Supponendoſi ancora l'arco una intiera periferia, ſi avrebbe $y = 0$, ed $\frac{ay}{s}$ ſarebbe pure $= 0$, vale a dire, che il centro di gravità in tal caſo ſarebbe lo ſteſſo centro del cerchio, ch' è un limite appunto della cercata diſtanza.

PROBLEMA II.

308. Assegnare una formola generale per trovare il centro di gravità di una data superficie (*Fig.* 103.).

RISOLUZIONE. Si denomini la proposta superficie $ARF = s$, ed il suo elemento $PMpm = ds$, e sia l'ascissa $AP = x$. Condotta dall' estremo A la AT parallela a PM, e normale ad AF, sarà xds il momento dell' elementare superficie Pm per rapporto ad AT, ed $S.xds$ la somma dei momenti della data superficie. Chiamata quindi la ricercata distanza del centro di gravità dalla retta AT, cioè $BG = u$, si avrà nota questa distanza, dividendo la somma dei momenti per la somma degli elementi (*N.* 8.), e sarà $u = \frac{S.xds}{s}$.

Per avere determinato il centro di gravità della data superficie, converrà ancora ritrovare la distanza dello stesso centro dalla linea AF. Si denomini perciò la $PM = y$, e conducasi l' intermedia HO; egli è chiaro, che nel punto di mezzo G sarà situato il centro di gravità dell' elemento Pm. Moltiplicando poi ds per $\frac{Ho}{2}$, ossia per $\frac{y}{2}$, si avrà il momento dell' elementare superficie Pm per rapporto alla retta AF, e sarà questo $= \frac{yds}{2}$. Presa perciò la somma di questi momenti, cioè $S.\frac{yds}{2}$, e divisa per la somma degli elementi, si avrà la ricercata distanza $u = \frac{S.\frac{yds}{2}}{s}$.

Se la superficie proposta ammetterà equazione algebraica tra

tra le coordinate x ed y, sarà l'elemento ds per le fatte denominazioni $= ydx$, e la formola per la distanza del ricercato centro da una retta AT condotta normale all' asse nel punto di origine delle ascisse, sarà $u = \frac{S.xydx}{S.ydx}$; e per la distanza di esso centro di gravità dall' asse AF, si avrà $u = \frac{\frac{S.y^2dx}{2}}{S.ydx}$.

Se la Curva AR (*Fig.* 105.) che circonscrive la superficie sarà riferita ad un fuoco F, chiamisi $FM = y$, e l'arco MN descritto col raggio $FM = dx$, e l'angolo $AFM = z$. Il centro di gravità del triangolo AFM sarà situato ad una distanza da $F = \frac{2}{3}y$ (*N.* 20.). Instituita adunque l'analogia $r : sen.z :: \frac{2}{3}y : \frac{sen.z.2y}{3r}$, si avrà la ricercata distanza u del centro di gravità dell' area elementare FMN per rapporto alla retta AF. Moltiplicandosi per tal valore l'infinitesima area del triangolo FMN, ossia $\frac{ydx}{2}$, si avrà il momento di quest' elemento $= \frac{ydx.sen.z.2y}{2.3r}$, e dividendosi la somma dei momenti per la somma degli elementi $S.\frac{ydx}{2}$, si avrà la distanza cercata CG, ossia $u = S.\frac{y^2.sen.z.dx}{3r} : \frac{S.ydx}{2}$.

Nello stesso modo si potrà assegnare la distanza di detto centro per rapporto alla retta FR, e si avrà per tal modo determinato il centro di gravità G della superficie proposta. Per far isvanire poi il differenziale dx dalla formola prece-

dente, si potrà istituire la proporzione $r : dz : y : dx$, e si avrà $dx = \frac{ydz}{r}$ valore da sostituirsi nella formola.

COROLLARIO I.

309. Sia la proposta superficie un segmento parabolico *BAR* (*Fig.* 106.), e dividasi la base *BR* per metà in *C*, e condotta la parallela *MN* per il punto di mezzo *P*, si alzi da *C* l'asse o diametro *CA*, il quale dividerà per mezzo tutte le altre ordinate, che si possono condurre parallele a *BR*, e quindi tutti gli elementi di essa superficie; il centro però di gravità della data superficie sarà situato in qualche punto del diametro *AC*. Per determinarne la distanza di esso dal vertice *A*, si chiami $AC = x$, $BC = y$, ed il parametro $= p$, cosicchè si abbia l'equazione $y = \sqrt{px}$. Assumendosi la formola generale per fissare una tale distanza, cioè $\frac{S.xydx}{S.ydx}$, e introdottovi il valore di y, avrassi $\frac{S.xp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}{S.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}$, ossia $\frac{S.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}{S.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx}$, e integrando, si troverà la ricercata distanza, cioè $u = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{1}{5}.x$. Se adun-

$$\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} \qquad \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3}$$

que si dividerà *AC* per modo che sia $AE = \frac{1}{5}$ di *AC*, si avrà nel punto *E* determinato il centro di gravità della proposta superficie *BAR*.

COROLLARIO II.

310. Data l'area triangolare *ACD* (*Fig.* 107.) si determinerà in essa il centro di gravità, se condotta dal vertice *A* alla metà di *CD* la retta *AB*; e da un punto *P* preso nella retta *AC*, la *PM* parallela a *CD*, chiameransi $AM = x$, $PM = y$, $AB = a$, $CB = b$, e si instituirà la proporzione $a : b :: x : y$, donde si ha $y = \frac{bx}{a}$. Poichè surrogato tal valore nella formola generale $\frac{S.xydx}{S.ydx}$, si avrà $\frac{\frac{S.bx^2dx}{a}}{\frac{S.bxdx}{a}} = u$, e integrando attualmente, risulterà $u = \frac{2}{3}x$, e fatto $x = a$, s'avrà $u = \frac{2}{3}.a$. La distanza adunque del centro di gravità dal vertice *A* nel proposto triangolo, sarà $= \frac{2}{3}.AB$.

COROLLARIO III.

311. Se la superficie data fosse un settore circolare *AMN* (*Fig.* 108.), si avrà di leggieri in esso determinato il centro di sua grandezza; poichè tirati i raggi *AM*, *Am* infinitamente prossimi, il centro di gravità dell' infinitesimo triangoletto *AMm*, sarà situato sul raggio intermedio *As*, e la sua distanza dal vertice *A* sarà $= \frac{2}{3}\ AS$ (*N.* 310.) $= \frac{2}{3}.a$ fatto il raggio $= a$. Se adunque si concepirà il dato settore diviso in una infinità di triangoletti simili al primo *AMm*, avranno questi il loro centro di gravità situato alla stessa distanza dal vertice *A*. Descritto quindi col raggio $AR = \frac{2}{3}a$

un arco di cerchio RX, tutt' i centri di gravità degli accennati triangoletti ſaranno ſituati nello ſteſſo arco, e il centro del dato ſettore ſarà lo ſteſſo che il centro del dato arco. Ma il centro di gravità di un arco ſi trova facendo la proporzione, l'arco alla corda, come il raggio alla diſtanza del centro di gravità dell' arco dal centro del cerchio, preſa tale diſtanza ſul raggio, che divide per metà la corda (*N.* 307.). Adunque ſe ſulla linea AB normale alla corda RX, ſi prenderà la diſtanza AE, che ſia quarta proporzionale dopo l'arco RX, e la corda corriſpondente, ed il raggio AR, ſi avrà il ricercato centro di gravità del dato arco circolare.

COROLLARIO IV.

312. Sia data la ſuperficie sferica MAm (*Fig.* 109.) nata dalla rivoluzione dell' arco AM intorno al diametro AB, e ſi abbia a determinare il centro di gravità di eſſa. Condotta MP ordinata al diametro, e l'infinitamente proſſima Np, chiamando $AB = 2a$, $AP = x$, $PM = y$, ſarà $y = \sqrt{2ax - xx}$, e differenziando $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$, e $dy^2 = \frac{a^2dx^2 - 2axdx^2 + x^2dx^2}{2ax - xx}$. Preſo quindi l'elemento di Curva $MN = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e introdotto il valore di dy^2, ſi avrà $ds = \sqrt{\frac{2axdx^2 - x^2dx^2 + a^2dx^2 - 2axdx^2 + x^2dx^2}{2ax - xx}} = \sqrt{\frac{a^2dx^2}{2ax - xx}} = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Se s'intenderà poi, che il minimo arco MN s'aggiri intorno all' aſſe AB, genererà nella

ſua rotazione una zona, che ſarà l'elemento della propoſta ſuperficie, ed avrà il centro di ſua gravità nello ſteſſo aſſe, oſſia diametro AB, e denominato il rapporto del raggio alla periferia quello di $r:c$, ſarà eſpreſſa per $\frac{cy}{r}.ds = cy.\frac{adx}{r\sqrt{2ax-xx}}$, e ſurrogato il valore di y, ſi troverà $=\frac{c}{r}.adx$. Soſtituendo finalmente nella general formola $S.\frac{xds}{ds}$, in luogo di ds, ch' eſprime quivi l'elemento della ſuperficie, il ſuo valore aſſegnato in queſto caſo particolare, ſarà $u = \frac{S.x.\frac{c}{r}.adx}{S.\frac{c}{r}.adx} = \frac{\frac{c.ax^2}{2.r}}{\frac{c}{r}.ax} = \frac{x}{2}$.

PROBLEMA III.

313. Piantare una formola generale per determinare il centro di gravità nei ſolidi.

RISOLUZIONE. Si denomini il dato ſolido s, ed il ſuo elemento ds, e ſi chiami la diſtanza di eſſo elemento da uno o più piani dati di poſizione $= t$; ſarà tds il momento del preſo elemento, ed $S.tds$ eſprimerà la ſomma dei momenti del dato ſolido, e per la diſtanza ricercata del centro di gravità del ſolido propoſto dal dato piano, e così da qualſivoglia altro ſi avrà $u = \frac{S.tds}{s}$.

Se il ſolido foſſe nato dalla rivoluzione di qualche ſuperficie, che ammetteſſe equazione algebraica tra le ſue coordinate, denominando il rapporto del diametro alla circonferenza quello di $2r:c$, la periferia del ſolido ſarebbe $= \frac{cy}{2r}$

e $ds = \frac{c}{2r} \cdot y^2 dx$; laonde denominata x la diſtanza del centro di gravità, nel preſo elemento, da un piano normale all' aſſe nell' origine delle aſciſſe, ſi avrebbe per la ſomma dei momenti la formola $S. \frac{cy^2}{2r} x dx$, e per la ſomma degli elementi $S. \frac{c}{2r} y^2 dx$, e quindi la ricercata diſtanza u del centro di gravità del propoſto ſolido dal dato piano ſi troverebbe $= \frac{\frac{c}{2r} S. x y^2 dx}{\frac{c}{2r} S. y^2 dx}$, oſſia più ſemplicemente ſarebbe $u = \frac{S. x y^2 dx}{S. y^2 dx}$; e ſiccome il centro di gravità ſi deve trovare ſull' aſſe di rivoluzione, ſi avrà ancora nella aſſegnata diſtanza, determinato il centro di gravità del ſolido dato.

COROLLARIO I.

314. Se il ſolido propoſto (*Fig.* 106.) foſſe un Paraboloide formato dalla rivoluzione della ſemiparabola *ACR* intorno all' aſſe o diametro *AP*, prendaſi l'equazione $y^m = x p^{m-1}$, oſſia fatto il parametro $p = 1$, $y^m = x$, la quale è atta ad eſprimere infinite Parabole. Si differenzj, e ſi avrà $dx = m y^{m-1} dy$, e introdotto il valore di dx nella formola generale $\frac{S. y^2 x dx}{S. y^2 dx}$, ſi avrà la ricercata diſtanza del centro di gravità del dato ſolido dal vertice A, cioè $u = \frac{S. x y^2 m y^{m-1} dy}{S. y^2 . m y^{m-1} dy}$

$$= \frac{S. m y^{m+1} dy}{S. m y^{m+1} dy} = \frac{\frac{m y^{2m+2}}{2m+2}}{\frac{m y^{m+2}}{m+2}} = \frac{\overline{m+2}}{2m+2} \cdot y^m = \frac{\overline{m+2}}{2m+2} \cdot x.$$

Se si farà quindi $x = AF = a$, il centro di gravità sarà situato sull' asse ad una distanza dal vertice $A = \frac{m+2}{2m+2} \cdot a$, e fatto $m = 2$, come nella Apolloniana, la distanza di esso centro da A, presa sullo stesso asse o diametro della Curva, sarà $= \frac{3}{4} \cdot a$.

COROLLARIO II.

315. Sia il solido generato dalla rivoluzione di un piano AFR (*Fig.* 103.), che sia porzione di un' Ellisse o di una Iperbola Apolloniana, e si cerchi sull' asse di rivoluzione AF, la distanza del centro di gravità del solido dal vertice A. Chiamato l'asse transverso $= a$ ed il parametro $= p$, e fatta $PM = y$ ed $AP = x$, l'equazione delle due accennate Curve sarà $y^2 = \frac{pax \mp px^2}{a}$, presi i segni superiori per l'Ellisse, e gl' inferiori per l'Iperbola. Surrogato quindi il valore di y^2 nella formola generale $\frac{S.xy^2dx}{S.y^2dx}$, avrassi la distanza u dal vertice $A = \frac{\frac{S.pax^2dx \mp px^3dx}{a}}{\frac{S.paxdx \mp px^2dx}{a}}$, ed integrando si avrà $u = \frac{\frac{pax^3}{3} \mp \frac{px^4}{4}}{\frac{pax^2}{2} \mp \frac{px^3}{3}}$, e diviso tutt' i termini per px^2, e ridotti, sarà $u = \frac{4ax \mp 3x^2}{6a \mp 4x}$. Si avrà adunque nota la distanza del centro di gravità dal vertice A, facendosi la proporzione $6a \mp 4x : 4a \mp 3x :: x :$ al quarto termine, che diverrà cognito col determinare la variabile x.

Se ſi farà quindi $x = \frac{a}{2}$, ſi troverà $u = \frac{5}{16}.a$ per la ſemieliſſoide ed $u = \frac{11}{16}.x$ per la metà del dato Iperboloide. Preſo poi $x = a$, troveraſſi $u = \frac{3}{8}a$ per l'intiera Eliſſoide, ed $u = \frac{7}{10}.a$ per l'Iperboloide. La diſtanza quindi del centro di gravità del vertice A di una ſemieliſſoide generata da una ſemieliſſe Apolloniana aggiranteſi intorno al ſuo grand' aſſe, ſarà $= \frac{5}{16}$ di tutto l'aſſe ſuddetto, e la diſtanza dello ſteſſo centro dal vertice A in una intiera Eliſſoide, ſi troverà eguale alla metà dell' aſſe, oſſia cadrà il centro di gravità nel centro dell' Eliſſe generatrice. Nell' Iperboloide conſiderata l'origine delle aſciſſe nel vertice A, e preſa AP = alla metà dell' aſſe tranſverſo, ſarà ſituato il centro di gravità ſulla ſteſſa AP ad una diſtanza da $A = \frac{11}{16}$ del dato aſſe tranſverſo; e preſa AP eguale all' intiero aſſe ſuddetto, ſarà il centro di gravità del ſolido generato diſtante da A per $\frac{7}{10}$ dell' aſſe tranſverſo.

COROLLARIO III.

316. Sia il propoſto ſolido un Cono (*Fig.* 110.), di cui ſi abbia a determinare il centro di gravità. Siccome un tal centro deve neceſſariamente eſſere nell' aſſe AD del Cono, che congiunge tutt' i centri de' ſuoi elementi, non ſi avrà quindi che a fiſſare ſulla retta AD la diſtanza di eſſo dal vertice A. S'intenda condotta la MP parallela a BD, e ſi denomini $AD = a$, $BD = r$, $AP = x$, $MP = y$. Per i triangoli ſimili MPA, e BDA ſi avrà l'analogia $a : r :: x : y$, oſſia $y = \frac{rx}{a}$. Se s'introdurrà quindi queſto valore di y nella formola generale $\frac{S.xy^2\,dx}{S.y^2\,dx}$, avraſſi $u = \frac{S.r^2x^2\,dx}{S.r^2x^2\,dx}$, ed integran-

grando $= \frac{\frac{r^4 x^4}{4}}{\frac{x^3}{3}} = \frac{1}{4}x$, fatto il raggio $= 1$. Preſa quindi $x = a$ $= AD$, il centro di gravità del Cono $ACRB$ ſarà diſtante da A per $\frac{1}{4}.AD$, e preſa $AG = \frac{1}{4}.a$, in eſſo punto G ſi avrà il ricercato centro di gravità del Cono propoſto.

SCOLIO.

317. Dalla eſpoſta Teoria dei centri di gravità, facile e piana ſi rende a dimoſtrarſi la celebre regola di Guldino, la quale ſtabiliſce, *che una quantità qualunque Geometrica, ſituata nello ſteſſo piano dell' aſſe di rivoluzione, produce nella rotazioue una quantità eguale al prodotto della quantità, che ſi ravvolge, moltiplicata per il cammino fatto dal ſuo centro di gravità nel tempo della rivoluzione.* Noi dimoſtreremo queſta elegantiſſima regola per le ſuperficie, e per i ſolidi nei due Teoremi ſeguenti.

TEOREMA I.

318. La ſuperficie (*Fig.* 111.) generata da una linea SM retta o curva, aggiranteſi intorno ad un dato aſſe di rivoluzione RL, ſituato nello ſteſſo piano, è eguale al prodotto della ſteſſa linea SM moltiplicata per l'arco, che deſcrive nella rotazione, il centro di gravità della ſteſſa ſuperficie.

DIMOSTRAZIONE. Si faccia la linea $SM = s$, e l'elemento $MN = ds$, e chiamiſi y la diſtanza Kt del centro di gravità dell' elemento MN dall' aſſe RL di rivoluzione,

ſarà yds il momento dell' elemento ds per rapporto ad RL, e s'avrà la diſtanza del centro di gravità della propoſta retta o curva dall' aſſe RL, cioè $u = \frac{S.yds}{s}$ (*N.* 306.). Moltiplicandoſi quindi i due termini di queſta equazione per il rapporto $\frac{c}{r}$ del raggio alla circonferenza, ſi avrà $\frac{c}{r}.u.s = \frac{c}{r}.S.yds$. Ma $\frac{c}{r}.u$ eſprime la circonferenza deſcritta col raggio $CG = u$, oſſia la periferia, che deſcrive il centro di gravità G della linea SM; ed $y.\frac{c}{r}$ dinota la circonferenza deſcritta dal punto t dell' elemento MN, la quale moltiplicata per ds, ci dà l' elemento della ſuperficie generata, la cui ſomma è $= \frac{c}{r}.S.yds = \frac{c}{r}.su$. Dunque queſta ſuperficie ſarà eguale al prodotto della linea SM, moltiplicata per il viaggio fatto dal centro di gravità di eſſa linea, durante il tempo della rivoluzione.

TEOREMA II.

319. Il ſolido generato da una ſuperficie, che ſi ravvolge intorno a un dato aſſe RL (*Fig.* 112.) ſituato nello ſteſſo piano, è eguale alla ſuperficie ſteſſa moltiplicata nel viaggio fatto dal centro di gravità di eſſa, durante la rivoluzione.

DIMOSTRAZIONE. Sia la ſuperficie data $SAB = s$, ed il ſuo elemento $PMpm = ds$. Condotta la retta intermedia Kt, e diviſa per metà in G, ſarà il centro di gravità di queſto elemento ſituato nello ſteſſo punto G, e denominando la diſtanza di queſto punto dall' aſſe di rivoluzione, cioè

$CG = y$, ſarà yds il momento della elementare ſuperficie Pm per riguardo all' aſſe RL, e la diſtanza del centro di gravità dell' intiera ſuperficie RAS dal predetto aſſe, ſarà $u = \frac{S.yds}{s}$, donde ſi ha $S.yds = su$; e $\frac{c}{r}.su = \frac{c}{r} S.yds$. Ma $\frac{c}{r}.y$ ſi è la circonferenza deſcritta dal punto G intorno ad RL, e $\frac{c}{r}.yds$ eſprime il ſolidetto generato dall' elemento Pm, ed $S.\frac{c}{r}.yds$ l'intiero ſolido nato dalla ſuperficie ASB ravvolgenteſi intorno ad RL. Adunque il ſolido generato dalla rotazione della ſuperficie ABS intorno ad RL, ſarà eguale al prodotto di queſta ſuperficie moltiplicata per la periferia deſcritta dal centro di gravità di eſſa ſuperficie, oſſia per il viaggio fatto da eſſo centro in tutto il tempo della rivoluzione.

SCOLIO.

320. Nella eſpoſta regola di Guldino deveſi oſſervare che ſe una porzione della linea o ſuperficie, che deve ravvolgerſi foſſe ſituata dall' oppoſta parte dell' aſſe di rotazione, nella quale non ſi trovaſſe il centro di gravità della data intiera linea o ſuperficie, gli elementi di tal porzione di linea o ſuperficie, avrebbero diſtanze negative per rapporto all' aſſe di rivoluzione; le ſuperficie quindi ed i ſolidi, che ſi ingenerano da tali porzioni (*Fig.* 113.), ſi dovranno prendere come quantità negative, ed aſſegnato il centro di gravità parziale, e la diſtanza di eſſo dall' aſſe RL, la differenza delle due quantità generate ſarà eguale alla linea o ſuperficie inſiſtente ſopra l'aſſe di rotazione, moltiplicata

per il cammino del loro centro di gravità. Se l'asse di rotazione passa per il centro di gravità della proposta linea o superficie, le quantità generate dalle parti esistenti di quà e di là dall' asse saranno eguali. Che se si cercherà il centro di gravità di ciascuna parte in particolare, si troverà facilmente la quantità generata per ciascuna porzione, e la somma o la differenza di esse quantità per tal modo generate. Di somma utilità riesce la regola Guldiniana nella soluzione dei Problemi, dei quali ne porremo quivi alcun esempio.

PROBLEMA IV.

321. Date le linee A, B, D, E, F, le quali si aggirino intorno all' asse RL, trovare la somma di tutte le superficie generate (*Fig.* 114.).

RISOLUZIONE. Si congiungano le linee A e B colla retta AB, che divida per metà queste linee, e si divida la AB in ragion reciproca delle stesse rette A e B, per avere nel punto di tal divisione G, il centro di gravità di queste due linee, considerate quivi a guisa di pesi (*N.* 22.). Tirando quindi al punto di mezzo della linea D la retta GD, e divisa questa in H in ragione inversa di $A+B:D$, si avrà nel punto H il centro di gravità delle tre linee A, B, D. Per il punto H si conduca al mezzo della retta E la linea HE, e si determini allo stesso modo il centro di gravità P delle tre rette A, B, D, per rapporto alla quarta E. Per il punto F finalmente, che divide per metà la retta F, si tiri la FP, e divisa questa in ragion reciproca delle rette A, B, D, E, coll' ultima F si avrà per tal modo determinato in C il centro di gravità delle cinque date rette

A, *B*, *D*, *E*, *F* (*N.* 24.). Quindi ſe per il punto *C* ſi tirerà la retta *MCV* parallela ad *RL*, ed eguale alla ſomma delle rette propoſte, manifeſta coſa è che la ſuperficie generata dalla ſteſſa *MV* ravvolgenteſi intorno ad *RL* per un intiero cerchio, ſarà manifeſtamente eguale alle ſuperficie, che ſi ſarebbero generate dalle date rette *A*, *B*, *C*, *D*, *E* (*N.* 318.), le quali ſi foſſero ravvolte intorno ad *RL* nella prima loro poſizione, compiendo intiere zone, il centro delle quali foſſe nell' aſſe *RL*.

PROBLEMA V.

322. Dato un cerchio *ABMN*, che ſi ravvolge intorno all' aſſe *RL*, trovare il rapporto delle ſuperficie generate dalle due ſemicirconferenze *MBN* ed *MAN* (*Fig.* 115.).

RISOLUZIONE. Si chiami il raggio del dato cerchio $= r$, ed il quadrante $\overset{\frown}{MB} = s$, e la ſemiperiferia quindi $MBN = 2.s$. Si avrà la ſeguente proporzione $2.s : 2r :: r : CH$ (*N.* 311.) e $CH = \frac{2rr}{2.s} = \frac{r^2}{s}$, che ſarà la diſtanza del centro di gravità della ſemiperiferia *MBN* dal centro *C* del dato cerchio. Similmente ſi troverà la diſtanza del centro di gravità della ſemicirconferenza *MAN* dallo ſteſſo centro *C* del cerchio, cioè $CG = \frac{r^2}{s}$, e fatta $PC = u$, ſarà $PH = u + \frac{r^2}{s}$ e $PG = u - \frac{r^2}{s}$. Ma eſſendo date le due Curve generanti eguali, le ſuperficie generate devono eſſere come le circonferenze deſcritte dai punti *H* e *G* intorno ad *RL*. Adunque la ſuperficie generata dalla ſemiperiferia *MAN* alla ſuperficie prodotta dall' altra eguale ſemicirconferenza

MBN, ſarà :: PH : PG, oſſia :: $u + \frac{r^2}{s}$: $u - \frac{r^2}{s}$ :: $u.s + r^2 : u.s - r^2$.

COROLLARIO.

323. Se ſi vorrà avere tra le due ſuperficie una data ragione d'ineguaglianza maggiore, per eſempio, di $m : n$, facciaſi $u + \frac{r^2}{s} : u - \frac{r^2}{s} :: m : n$, e quindi componendo, e dividendo, e preſi in ſeguito gli antecedenti delle due proporzioni, avraſſi $u : \frac{r^2}{s} :: m + n : m - n$. Si dovrà adunque prendere CP tale che ſia a CH, ovvero a CG :: $m + n : m - n$.

PROBLEMA VI.

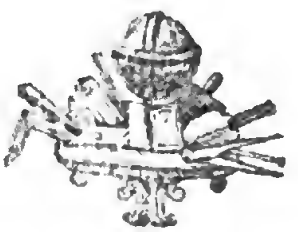
324. Dato il ſegmento parabolico BAS ed il trapezio $BEHDC$, che ſi ravvolgono intorno all'aſſe RL, trovare un ſolido eguale alla ſomma degli anelli generati nella rotazione da queſte due figure (*Fig.* 116.).

DIMOSTRAZIONE. Si riſolva il dato trapezio nei triangoli BHD, BED, ECD, e ſi determini il centro di gravità di ciaſcuno (*N.* 310.). Congiungendo quindi i centri di gravità t ed h di due triangoli colla retta th, ſi divida in g la ſteſſa retta in ragione reciproca delle aree dei due triangoli BDH ed ECD, e ſi tiri al centro di gravità c del terzo triangolo la retta gc, la quale diviſa pure in ragione inverſa del triangolo BED alla ſomma dei due primi BDH e ECD, darà nel punto e di diviſione il centro di gravità di tutta la propoſta figura (*N.* 23.). Si determini in ſeguito il centro di gravità F del ſegmento parabolico

BAS (*N.* 309.), e s'intenda condotta al punto *e* la retta *Fe*, la quale venendo divisa in reciproca ragione delle aree delle due date figure, darà nel punto *G* così determinato il centro di gravità di esse figure (*N.* 22.). Se si formerà quindi un rettangolo eguale alla somma delle aree delle date figure, e tale che il suo centro di gravità sia situato nel punto *G* dianzi determinato, ravvolgendosi questo rettangolo intorno all' asse *RL*, genererà un cilindro eguale (*N.* 319.) alla somma dei due anelli, che genererebbero le due figure *BAS* e *BEDHC* arruotantisi intorno ad *RL* nella prima data posizione.

SCOLIO.

325. Noi abbiamo supposto fino ad ora, che la rivoluzione delle linee o delle superficie si faccia per una intiera circonferenza di cerchio; ma ella è cosa però da notarsi, che la regola di Guldino non suppone la rivoluzione intiera, e si può trovare con essa una superficie ed un solido dopo un arco qualunque di cerchio, purchè nel rapporto della circonferenza al raggio espresso da $\frac{c}{r}$ la lettera *c* si faccia esprimere l'arco di rivoluzione, che si vuole determinare.



CAPO DECIMOTTAVO.

DEI CENTRI DI OSCILLAZIONE E DI PERCUSSIONE.

PROBLEMA I.

326. STabilire una formola generale per determinare il centro di oſcillazione nelle figure piane e regolari, reſtando coſtantemente la loro baſe parallela a un dato aſſe di oſcillazione (*Fig.* 117.).

RISOLUZIONE. Sia il piano *CBD* oſcillante, e reſti la baſe *BD* parallela tuttora all' aſſe *RT*; manifeſta coſa è che ogni particella di queſto piano ſcorrerà un ſimile arco di cerchio, ed avrà una velocità proporzionale al raggio che le compete (*N.* 8.). Condotta quindi da *C* alla metà della baſe la retta *CA*, e da queſta una *PM* parallela a *BD*, denominata $CP = x$, $PM = y$, ſarà $Pp = dx$, e l'elemento $Nn = 2ydx$, e moltiplicando queſt' elemento per la velocità, con cui traſcorre un arco di cerchio nell' oſcillazione dell' intiero piano, s' avrà il momento di eſſo elemento $= 2yxdx$. Se ſi conſiderano poi queſti elementi a guiſa di peſi ſituati a diverſe diſtanze dal punto *C* di ſoſpenſione, come eſigge la natura di un pendolo compoſto, ſarà il momento di ciaſcuno di queſti infiniteſimi peſi $= 2yx^2dx$, e la ſomma di tutt' i momenti di eſſi ſarà eſpreſſa per $2S.yx^2dx$. Dividendoſi quindi la ſomma di queſti momenti per la ſomma degli elementi, oſſia dei peſi, il quoto di $\frac{2S.yx^2dx}{2S.yxdx}$ ci darà la comune e media velocità (*N.* 9.) di tutti queſti peſi per rapporto al punto *C*, oſſia determinerà alla diſtanza *OC* il pun-

punto O, in cui conſiderandoſi ſituate tutte le particelle del pendolo compoſto, oſſia gli elementi del dato piano, avrebbero la ſteſſa ſomma di velocità, che ottengono ſeparatamente in tutto il piano CDB, e ſi avrà quindi determinato nel punto O il ricercato centro di oſcillazione.

PROBLEMA II.

327. Determinare il centro di oſcillazione in un triangolo rettangolo ſoſpeſo nel vertice C ed oſcillante intorno all' aſſe TR parallelo alla ſua baſe BD (*Fig.* 118.).

RISOLUZIONE. Si conduca l'ordinata PM parallela alla baſe, e ſi denomini $CB = a$, $BD = b$, $CP = x$, $PM = y$, ſarà $a : b :: x : y$, oſſia $y = \frac{bx}{a}$. Preſa quindi la general formola di ſopra ſtabilita (*N.* 326.), cioè $\frac{S.yx^2dx}{S.xydx}$, e introdottovi il valore di y, avraſſi $\frac{S.bx^3dx}{S.bx^2dx} = \frac{3.bx^4}{4.bx^3} = \frac{1}{4}x$; laonde ſe ſi prenderà per l'aſciſſa x l'intiera $CB = a$, ſarà il ricercato centro di oſcillazione del dato triangolo CBD diſtante dal vertice C per $\frac{1}{4}a$.

COROLLARIO I.

328. Se s'intenderà diviſo il triangolo CBD per la variabile PM, cioè per y, rimarrà l'altezza CB di eſſo, e nella formola generale dei centri di oſcillazione, omeſſa la quantità y, rimarrà $\frac{Sx^2dx}{S.xdx} = \frac{2x}{3}$. Preſa quindi $CP = CB = a$, il centro di oſcillazione della retta CB, ſoſpeſa nel vertice C, ſarà diſtante da eſſo punto C per $\frac{2}{3}CB$.

COROLLARIO II.

329. Volendoſi che il triangolo *CBD* vada oſcillando intorno alla baſe *BD*, ſituata ſull' aſſe *TR*, ritenute le denominazioni ſuperiori, ſarà $PB = a - x$, e ſi dovrà tale quantità ſoſtituire in luogo di x nella formola generale, e la ricercata diſtanza del centro di oſcillazione di eſſo triangolo dall' aſſe *TR*, ſarà $= \frac{S.ydx.\overline{a-x}^2}{S.ydx.\overline{a-x}}$, e poſto in luogo di y il ſuo valore $\frac{bx}{a}$, riſulterà $= \frac{S.\frac{bx}{a}.dx.\overline{a-x}^2}{S.\frac{bx}{a}.dx.\overline{a-x}} =$

$$\frac{S.a^2bxdx - S.2axbxdx + S.x^2bx.dx}{S.abxdx - S.bx^2dx} = \frac{\frac{12.a^2bx^2 - 16.abx^3 + 6.bx^4}{24}}{\frac{3abx^2 - 2bx^3}{6}}$$

$= \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x} = \frac{a}{2}$, fatto $x = a$. Nella metà adunque dell' altezza *CB* cadrà il centro di oſcillazione del triangolo *CBD* oſcillante nella data poſizione.

COROLLARIO III.

330. Se ſi aſſumerà la formola generale ſtabilita di ſopra (*N.* 308.) per determinare nelle ſuperficie la diſtanza del centro di gravità da una retta condotta normale al vertice delle aſciſſe, cioè $\frac{S.yxdx}{S.ydx}$, ritenute le ſuperiori denominazioni, e ſurrogato il valore di y, la diſtanza del centro di gravità nel triangolo *CBD*, ſi troverà $= \frac{2}{3}.a$, oſſia ſarà

il centro di gravità distante dal vertice C per $\frac{1}{3}$ di CB, e la distanza quindi dello stesso centro dalla base sarà $\frac{1}{3}.CB$. L'intervallo adunque tra i due centri di gravità e di oscillazione nel caso del triangolo BCD oscillante intorno al vertice, sarà $=\frac{1}{12}.CB$. Supposto poi il triangolo BCD oscillante intorno alla base, sarà l'intervallo tra i due detti centri $=\frac{1}{6}.CB$, ch' è l'altezza del dato triangolo. Nella retta poi CB, il cui centro di gravità si è nel punto, che la divide per metà, saranno distanti i due centri di gravità e di oscillazione per $\frac{1}{6}$ di essa.

PROBLEMA III.

331. Dato un rettangolo $ABDE$ sospeso ad una verga inflessibile CL raffigurante una linea geometrica, determinare la distanza del centro di oscillazione di esso quadrilatero da un asse TCR normale a CL (*Fig.* 119.).

Risoluzione. Sia l'ordinata costante $mp = AL = b$, ed $LP = x$, $LF = AD = a$, e $CL = c$. Chiara cosa è a vedersi che nella general formola dei centri d'oscillazione si dovrà al luogo di y, ch' esprime l'ordinata, sostituire la costante b, e in vece di x, che dinota la ricercata distanza dal punto di sostegno, si dovrà surrogare la quantità $c+x$, il che fatto, la general formola $\frac{S.x^2ydx}{S.xydx}$ si cangierà nella seguente $\frac{S.bdx.\overline{c+x}^2}{S.b.dx.\overline{c+x}} = \frac{3bc^2x+3cbx^2+bx^3}{\frac{3}{2bcx+bx^2}} = \frac{6.c^2+6.cx+2x^2}{6.c+3x}$,

e fatto $x = a$, ci darà la ricercata distanza dal punto C nell' intiero rettangolo $AE = \frac{6.c^2+6.ac+2.a^2}{6.c+3.a}$.

COROLLARIO.

332. Se le oscillazioni del dato rettangolo si volessero fatte intorno al lato AB, il quale venisse a coincidere coll' asse TR, diverrebbe in tal caso la quantità $c = 0$, e l'espressione della distanza del voluto centro dall' asse di rivoluzione, si troverebbe più semplificata, e ridotta $= \frac{2a}{3}$.

PROBLEMA IV.

333. Ritrovare il centro di oscillazione nelle Parabole di qualunque genere, le quali muovansi intorno ad una data retta RT parallela alla loro base, e normale all' asse o diametro di queste Curve nel vertice di esse (*Fig.* 119.).

RISOLUZIONE. Prendasi l'equazione $y^{m+n} = x^n . a^m$ atta ad esprimerle tutte in generale, ovvero fatto il parametro $= 1$ si abbia $y^{m+n} = x^n$ sarà $y = x^{\frac{n}{m+n}}$, e introdotto tal valore nella formola generale dei centri di oscillazione stabilita di sopra, si avrà $\frac{S.x^{\frac{n}{m+n}+1}.dx}{S.x^{\frac{n}{m+n}+1}.dx} = \frac{S.x^{\frac{3n+2m}{m+n}}.dx}{S.x^{\frac{2n+m}{m+n}}.dx} = \frac{\frac{m+n}{4n+3m}.x^{\frac{4n+3m}{m+n}}}{\frac{m+n}{3n+2m}.x^{\frac{3n+2m}{m+n}}}$

$= \frac{3n+2m}{4n+3m}.x$.

COROLLARIO.

334. Nella Parabola Apolloniana, in cui si ha $m = 1$ ed $n = 1$, sarà $\frac{3n+2m}{4n+3m}.x = \frac{5}{7}.x$, cioè sarà il centro d'oscil-

lazione distante dal vertice per $\frac{5}{7}$ dell' ascissa, e presa $x = AF = a$, sarà la ricercata distanza OC nella data Parabola $= \frac{5}{7}.a$.

Nelle Parabole cubiche, in cui si assume $m = 2$, ed $n = 1$, si avrà tale distanza $= \frac{7}{10}.x = \frac{7}{10}.a$.

Nei Paraboloidi biquadratici, fatto $m = 3$ ed $n = 1$, si troverà l'intervallo tra il vertice C, ed il centro di oscillazione $= \frac{5}{11}.a$.

Variando poi l'ordine di queste Curve, fatto $n = 2$, $m = 1$ si troverà il centro d'oscillazione distante dal vertice per $\frac{8}{11}.x = \frac{8}{11}.a$ nelle Curve di questa specie, in cui si abbia determinata l'ascissa $= a$; e fatto $n = 3$ per le Parabole di terz'ordine, si avrà il ricercato intervallo $= \frac{11}{15}.x = \frac{11}{15}.a$.

PROBLEMA V.

335. Piantare una formola generale atta a determinare il centro di oscillazione nelle figure piane, a cui resti normale l'asse RT in tutto il tempo del loro moto (*Fig.* 120.).

Risoluzione. Sia la figura ACB, la quale si muova lateralmente intorno all' asse RT, e s' intendano condotte le due ordinate MS ed ms infinitamente prossime e parallele alla base AB, le quali racchiudano un elemento della proposta superficie. Egli è chiaro, che tutti gli elementi di questo spazietto Ms non avranno una eguale distanza dall' asse RT supposto normale al piano ACB, e la loro velocità per rapporto ad RT si dovrà estimare dalla variabile CN condotta dal punto di sospensione C ai successivi elementi Nr. Si abbassi quindi la CP, che divida per metà la MS, e si denomini $CP = x$, $PN = y$, sarà $\overline{CN}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{CD}^2$,

oſſia $= x^2 + y^2$, preſa la y variabile a norma della NL alzata dal punto N parallela all' aſſe CP, nel caſo che l'angolo CPM ſia retto. Nella formola adunque generale $\frac{2S.x^2ydx}{2S.xydx}$ ſtabilita ſuperiormente (*N.* 326.) nell' Ipoteſi, che le particelle di qualunque elemento aveſſero una eguale velocità per rapporto a un dato aſſe, ſi dovrà al luogo di x^2 nella Ipoteſi quivi fatta, ſoſtituire il valore $x^2 + y^2$, e in vece dell' elemento ydx, ſi dovrà ſurrogare l'infiniteſimo elemento Nr, che corriſponde a ciaſcuna CN, oſſia $dydx$, e il numeratore della formola ſuperiore diverrà $2S.x^2dxdy + 2S.y^2dy.dx$. Potendoſi poi conſiderare i centri di gravità di tutti gli elementi $MmSs$ del dato piano raccolti nell' aſſe CF, rimarrà ancora nella formola lo ſteſſo denominatore di prima, e l'eſpreſſione generale dei centri di oſcillazione nelle figure piane, a cui reſti normale il dato aſſe RT, ſarà $\frac{2S.x^2dxdy + 2S.y^2dydx}{2S.xydx}$, e integrando, nell' Ipoteſi che ſia variabile la ſola y, riſulterà $\frac{2x^2ydx + \frac{2y^3dx}{3}}{2xydx}$, e di nuovo preſe le ſomme, ſuppoſte ambe le ſpecie variabili, ſi avrà $\frac{S.x^2ydx + \frac{S.y^3dx}{3}}{S.xydx}$.

Nel caſo che l'angolo CPN foſſe obbliquo (*Fig.* 121.), condotte le normali NV ed $N'E$ ſopra l'aſſe CP prodotto, ſe fia duopo, e ſuppoſta $PN = PN'$, e fatta $PV = PE = b$, ſarà $\overline{CN}^2 = xx + yy - 2xb$ nel caſo dell'angolo CPN acuto, e dall' oppoſta parte, in cui formeraſſi l'angolo CPN ottuſo, ſarà $\overline{CN}^2 = xx + yy + 2bx$. Nella formola adunque ſtabilita di ſopra nel caſo dell' angolo retto, cioè $\frac{2S.\overline{x^2 + y^2}.dxdy}{2S.xydx}$, ſi

dovranno introdurre al luogo di x^2+y^2 le quantità $x^2+y^2+2bx-2bx$, donde si avrebbe $\frac{2S.(x^2+y^2+2bx-2bx).dxdy}{2S.xydx}$; ma per l'eliſione delle due eguali quantità $+2bx-2bx$, la formola ſi ridurrà ancora all' eſpreſſione di prima, e ſarà generalmente, poſto qualunque angolo delle coordinate, la diſtanza del centro di oſcillazione nella fatta Ipoteſi $=\frac{S.x^2ydx+\frac{S.y^3dx}{3}}{S.xydx}$.

COROLLARIO.

336. Siccome $\frac{S.x^2ydx}{S.xydx}$ eſprime la diſtanza generalmente del centro di oſcillazione da un dato aſſe *RT* nelle figure piane, che abbiano la baſe tuttora parallela all' aſſe ſuddetto durante l'oſcillazione; quindi ricercandoſi lo ſteſſo centro nelle ſuperficie, a cui reſti l'aſſe *RT* normale, non ſi avrà che ad aggiugnere alla prima diſtanza già trovata, quella che riſulterà da $\frac{S.y^3dx}{3}$, inchiudendo la ſeconda formola in ſe ſteſſa la prima.

PROBLEMA VI.

337. Dato un triangolo qualunque *DAC* oſcillante intorno all' aſſe *RT* normale al piano di eſſo, determinare il centro di oſcillazione di eſſo triangolo (*Fig.* 122.).

RISOLUZIONE. Dal vertice *C* ſi conduca alla metà della baſe la retta *CD*, e preſo in eſſa un qualſivoglia punto *P*, ſi tiri la *PM* parallela a *DA*. Denominata quindi $AB=\frac{b}{2}$

$CB = a$, $CP = x$, $MP = y$, ſi avrà $y = \frac{bx}{2a}$, e ſurrogato queſto valore di y nella formola generale ſtabilita nel Problema precedente, ſi avrà per il primo termine della formola applicata al triangolo $\frac{\frac{S.bx^1dx}{2a}}{\frac{S.bx^2dx}{2a}} = \frac{1}{4}.x$. Surrogato ancora lo ſteſſo valore di y nel ſecondo termine della ſteſſa formola, riſulterà eſſo $\frac{\frac{S.b^1x^1dx}{24.a^1}}{\frac{S.bx^2dx}{2a}} = \frac{6.b^2ax^4}{96.a^1x^1} = \frac{6.b^2x}{96.a^2}$, e fatto $x = a$, oſſia preſa per aſciſſa l'intiera retta CB, ſi avrà queſto ſecondo termine $= \frac{b^2}{16.a}$. Si troverà adunque il centro di oſcillazione O del triangolo ACD ſituato ſulla retta CB ad una diſtanza da $C = \frac{3}{4}.a + \frac{b^2}{16.a}$.

PROBLEMA VII.

338. Determinare il centro di oſcillazione in una Parabola Apolloniana *HCG* ſoſpeſa nel vertice *C*, ed oſcillante intorno all'aſſe *RT* normale al ſuo piano (*Fig.* 119.).

RISOLUZIONE. Si chiami l'aſciſſa $CP = x$, e l'ordinata $PM = y$, ed il parametro $= p$, coſicchè ſi abbia $y = x^{\frac{1}{2}}.p^{\frac{1}{2}}$, ſarà $\frac{S.x^2ydx}{S.xydx} = \frac{1}{7}.x$ (*N.*334.). Soſtituito quindi lo ſteſſo valore di y nell'altra parte della formola, riuſcirà

ſcilà $\frac{S.y^2dx}{\frac{3}{S.xydx}} = \frac{\frac{S.p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}dx}{3}}{\frac{S.p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.dx}{\frac{2p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}}{5}}} = \frac{\frac{2p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}}{15}}{\frac{2p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}}{5}} = \frac{2}{3}$. La diſtanza adun-

que del centro di oſcillazione della data Parabola *HGC*, fatto $x = CF = a$, ſi troverà ſulla retta *CF*, cominciando da $C = \frac{1}{7}.a + \frac{2}{3}$.

COROLLARIO:

339. Se la data Parabola, in vece di eſſere ſoſtenuta nel vertice, ſarà ſoſpeſa nella metà della ſua baſe *HG* (*Fig.*123.) e andrà oſcillando per modo che l'aſſe *RT* rimanga ſempre perpendicolare alla direzione del piano di eſſa *HGC*, fatta $CF = a$, e ritenute le altre ſuperiori denominazioni, non ſi avrà che a ſoſtituire nella formola al luogo di x il valore di $FP = CF - CP = a - x$, ed operando come ſopra, riſulterà primieramente $\frac{S.xy^2dx}{S.xydx} = \frac{S.p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}.dx \times \overline{a-x}^2}{S.p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.dx \times \overline{a-x}} =$

$$\frac{\frac{2p^{\frac{1}{2}}.a^2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4p^{\frac{1}{2}}.ax^{\frac{3}{2}}}{5} + \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{7}}{\frac{2ap^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{5}{2}}}{5}} = \frac{\frac{2a^2}{3} - \frac{4ax}{5} + \frac{2x^2}{7}}{\frac{2a}{3} - \frac{2x}{5}} =$$

$$\frac{\frac{70.a^2 - 84.ax + 30.x^2}{105}}{\frac{10.a - 6.x}{15}} = \frac{70.a^2 - 84.ax + 30.x^2}{7 \times \overline{10.a - 6.x}} \text{ (e preſa } x = CF = a\text{)}$$

si troverà $= \frac{16.a^2}{28.a} = \frac{4}{7}.a$. Sarà in oltre la formola $\frac{S.y^3dx}{S.xydx}$

$$= \frac{S.p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.dx}{S.p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.dx \times \sqrt{a-x}} = \frac{\frac{2p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}}{15}}{\frac{2ap^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2p^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{5}{2}}}{5}} = \frac{\frac{2px}{15}}{\frac{2a}{3} - \frac{2x}{5}} = \frac{2px}{10.a - 6x}$$

(e fatto $x = a$) $= \frac{2.pa}{4a} = \frac{p}{2}$. Il centro adunque di oscillazione nella indicata Parabola cadrà nel punto O distante da F per un intervallo $= \frac{4}{7}.a + \frac{f}{6}$.

TEOREMA I.

340. Il centro di gravità in una superficie qualunque agitata intorno ad un asse RT, situato nello stesso piano, ovvero normale al piano di essa, verrà sempre a cadere tra il punto di sostegno C, ed il centro O di oscillazione (*Fig.* 119; 120.).

DIMOSTRAZIONE. Si instituisca il paragone in generale sopra una Curva qualunque tra le distanze dei due centri di gravità, e di oscillazione dal punto di sostegno C, cioè primieramente tra $\frac{S.xydx}{S.ydx}$ e tra $\frac{S.x^2ydx}{S.xydx}$, indi tra $\frac{S.xydx}{S.ydx}$, ed $\frac{S.x^2ydx + \frac{S.y^3dx}{3}}{S.xydx}$, che ne sono le formole ecumeniche (*N.*308; 326; 335.); e poichè si considera quivi la stessa ordinata per riguardo ai due centri, si potrà assumere la costante $y = 1$, ed integrando le due prime formole, si avrà

$\frac{x^2}{2x} >$ ovvero $< \frac{2x^2}{3x^2}$, ossia $\frac{x}{2} < \frac{2}{3}x$. Prese le altre due formole $\frac{S.xydx}{S.ydx}$ ed $\frac{S.x^2ydx + \frac{S.y^3dx}{3}}{S.xydx}$, e ritenuta la stessa Ipotesi, e fatta l'integrazione, si avrà $\frac{2x^2 + 2x}{3x^2} >$ ovvero $< \frac{x^2}{2x}$, $\frac{2x}{3} + \frac{2}{3x} >$ ovvero $< \frac{x}{2}$, e riducendo $12xx + 12 > 9xx$, donde apparisce chiaramente, che sì nell' uno, che nell' altro caso, maggiore sarà sempre la distanza del centro di oscillazione dal dato punto di sospensione di quella del centro di gravità *G*, il quale dovrà restare perciò intermedio tra i sovraccennati due punti.

COROLLARIO I.

341. Siccome poi il centro di gravità di un solido qualunque è inalterabile in qualunque posizione di esso solido, venendo determinata sullo stesso asse la distanza del centro di oscillazione da un dato punto *C* di sospensione, il rettangolo di *GO.GC*, delle distanze cioè tra il centro di gravità e quello di oscillazione, e tra questo ed il punto di sostegno, sarà costante. Preso quindi ancora il centro *O* per punto di sospensione, sarà *GC* la distanza dei due centri, e *GO* la distanza del centro di gravità dal punto di sostegno, e diverrà *C* il centro di oscillazione, ch' era avanti il punto del sostegno. Il centro adunque di oscillazione si potrà cangiare in punto di sospensione, e l'uno all' altro potrassi sostituire.

COROLLARIO II.

242. La distanza quindi *OG* tra i due centri di gravità

e di oſcillazione, ſarà reciprocamente proporzionale alla diſtanza del centro di gravità dal punto di ſoſpenſione; poichè al creſcere di *OG* andrà ſminuendoſi la *GC*. Se ſaranno date nei caſi particolari le diſtanze *GC* e *GO* (*Fig.* 119.), e ſi cangierà comunque il punto di ſoſtegno, ſi troverà la nuova diſtanza del centro di oſcillazione dal punto di ſoſtegno, accreſcendo o ſminuendo la diſtanza *OG* dei due centri nella ſteſſa proporzione, con cui ſcema o creſce la diſtanza *GC* del centro di gravità dal nuovo punto di ſoſpenſione. Così, a cagion d'eſempio, eſſendoſi trovata la diſtanza del centro di oſcillazione in una Parabola ſoſpeſa nel vertice $= \frac{1}{7}.x + \frac{1}{5}.p$ (*N.* 338.), e ſapendoſi ancora eſſere la diſtanza del centro di gravità dallo ſteſſo vertice $= \frac{1}{3}x$ (*N.* 309.), ſi avrà nota la diſtanza dei due centri nel ſegmento parabolico *HCG*, e ſarà $OG = \frac{1}{7}.x + \frac{1}{5}p - \frac{1}{3}.x = \frac{4x}{35} + \frac{p}{3}$. Denominando quindi l la diſtanza del nuovo punto di ſoſpenſione dal vertice, ſi dovià inſtituire la proporzione $\frac{1}{3}.x + l : \frac{1}{3}.x :: \frac{4x}{35} + \frac{p}{3}$: al quarto termine, che darà la diſtanza del centro di oſcillazione dal nuovo punto di ſoſpenſione $= \frac{\frac{12.x^2}{175} + \frac{3.px}{15}}{\frac{3.x + 5.l}{5}}$

$= \frac{12.x^2 + 35.px}{35.(3x + 5.l)}$.

PROBLEMA VIII.

343. Determinare generalmente il centro di oſcillazione nei ſolidi generati dalla rotazione di figure piane intorno al loro aſſe (*Fig.* 124.).

RISOLUZIONE. Presa la formola generale disposta per le figure piane, oscillanti lateralmente ad un asse, che resti ad esse normale, cioè $\frac{S.x^2dydx + S.y^2dydx}{S.xydx}$ (*N.* 335.), fatta $x = CF$, si dovrà nel caso dei solidi moltiplicare xx per $FD = y$, onde avere il momento dell' intiero piano CFD, e sarà il primo termine della formola $S.x^2ydydx$. Similmente per avere il secondo termine di essa, adattato al caso dei solidi, si dovrà moltiplicare l' ordinata FA per la successiva VL, e preso il valore medio e ragguagliato di $VL = \frac{y}{2}$, si avrà per secondo termine $S.\frac{y^2}{2}dydx$. Dovendosi poi, per avere il centro di oscillazione, dividere la somma dei momenti ridotti a solidità per la somma degli elementi solidi, si avrà pure nella formola il denominatore della frazione $= S.yxdydx$. La formola adunque generale per determinare i centri di oscillazione nei solidi regolari, sarà la seguente $\frac{S.x^2ydydx + S.\frac{y^2}{2}dydx}{S.xydydx}$, e integrando primieramente, considerata variabile la sola y, indi prese le somme nell' Ipotesi di ambe le incognite variabili, la formola generale per determinare i centri di oscillazione nei mentovati solidi sospesi nel vertice del loro asse, sarà $\frac{S.x^2y^2dx + S.\frac{y^4dx}{4}}{S.xy^2dx}$.

ALTRA RISOLUZIONE. Si assuma la formola generale dei centri di oscillazione nelle figure piane oscillanti intorno ad un asse, che resti ad esse normale in tutto il tempo del loro moto, la quale si è trovata $\frac{S.x^2dydx + S.y^2dydx}{S.xdydx}$ (*N.* 335.).

Egli è chiaro, che in essa formola, per adattarla al caso, al luogo dell' elemento piano $dxdy$, si dovrà sostituire l'espressione dell' elemento solido, ed a questo fine converrà trovare la circonferenza descritta col raggio $PN = ld = y$, la quale, presa la ragione del raggio alla periferia quella di $r : c$, risulterà $= \frac{cy}{r}$, e perciò $\frac{cy^2}{2r}$ ne sarà l'area competente. Moltiplicandosi poi quest' area per dx, si avrà l'elementare base del solido generato dal triangolo PNC, e presa $PN = PM = y$, si avrà la base elementare del solido generato dalla rivoluzione del triangolo CPM, e $\frac{c}{2r}.S.y^2dx$ sarà l'espressione della intiera solidità. Avrassi adunque il primo termine della formola cangiato in $\frac{c}{2r}\ S.x^2y^2dx$, ed il denominatore di essa in $\frac{c}{2r}\ S.xy^2dx$. Preso il secondo termine, si dovrà in esso pure surrogare al luogo di $dxdy$, esprimente l'elemento piano Nr, la circonferenza descritta col raggio variabile $PN = ld = y$, e moltiplicata per $dydx$, il cui prodotto sarà $= \frac{cy}{r}.dydx$, il qual valore introdotto nel secondo termine della formola, lo cangierà nel seguente $\frac{c}{2r}.Sy^2dydx$. Fatta quindi $y = PM$, e prendendosi la somma di y^2dydx nell' Ipotesi di dx costante, avrassi $\frac{c}{2r}\ S.\frac{y^4dx}{4}$. La formola adunque generale sarà $\frac{S.x^2y^2dx + \frac{S.y^4dx}{4}}{S.xy^2dx}$.

Se l'angolo CPN non fosse retto, ma obbliquo, si varierebbe il valore di $\overline{PN}^2$, ma posti i due valori della

ſteſſa PN riſultanti dall' angolo ottuſo ed acuto, come ſopra (*N.* 335.), ſi avrebbe ancora per riſultato la formola di già ſtabilita.

PROBLEMA IX.

344. Data una sfera ſoſpeſa in qualche punto della ſuperficie, determinare ſul diametro di eſſa la diſtanza del centro di oſcillazione dal punto di ſoſtegno (*Fig.* 125.).

RISOLUZIONE. Facciaſi il diametro $AB = 2a$, l'aſciſſa $AP = x$, e l'ordinata PM normale al diametro $= y$, ſarà $yy = 2ax - xx$. Introdotto tal valore di yy nella formola generale dei centri di oſcillazione dei ſolidi, ſtabilita nell'antecedente Problema, ſi avrà la ricercata diſtanza del centro di oſcillazione della sfera propoſta, dal punto A di ſoſtegno preſo nella ſuperficie di eſſa $= \frac{S.2ax^3dx - S.x^4dx + \frac{S.4a^2x^2dx - S.4ax^3dx + S.x^4dx}{4}}{S.2ax^2dx - S.x^3dx}$

$$= \frac{\frac{2ax^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{4a^2x^3}{12} - \frac{4ax^4}{16} + \frac{x^5}{20}}{\frac{2ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}} = \frac{\frac{ax}{4} - \frac{3x^2}{20} + \frac{4a^2}{12}}{\frac{2a}{3} - \frac{x}{4}}$$

e fatto $x = 2a$, ſi troverà $= \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{3} - \frac{12a^2}{20}}{\frac{2a}{12}}$ e riducendo

$$= \frac{\frac{3a^2 + 2a^2 - 12a^2}{6} - \frac{20}{}}{\frac{a}{6}} = \frac{\frac{5.a^2 - 3a^2}{6} - \frac{5}{}}{\frac{a}{6}} = \frac{\frac{25.a^2 - 18a^2}{30}}{\frac{a}{6}} = \frac{\frac{7a^2}{30}}{\frac{a}{6}} =$$

$\frac{42.a^2}{30.a} = \frac{7}{5}.a$. Il centro adunque di oſcillazione di una sfera ſarà diſtante dal punto di ſoſtegno A per $\frac{7}{10}$ del diametro AB.

COROLLARIO I.

345. Se foſſe propoſto un emisfero ſoſpeſo nel vertice A, e penſile intorno allo ſteſſo punto, preſa l'aſciſſa $x = a$, ſi avrebbe la diſtanza dal punto di ſoſtegno del ricercato centro d'oſcillazione $= \frac{\frac{aa}{4} - \frac{3aa}{20} + \frac{4aa}{12}}{\frac{2a}{3} - \frac{a}{4}} = \frac{\frac{7aa}{12} - \frac{3aa}{20}}{\frac{5a}{12}}$

$= \frac{140a^3 - 36a^3}{100a} = \frac{104 \cdot a}{100} = \frac{26}{25} \cdot a.$

COROLLARIO II.

346. Se la sfera ſarà ſoſtenuta per un punto C (*Fig.* 124.) preſo fuori di eſſa, e andrà oſcillando intorno ad eſſo, ſupponendoſi data la diſtanza del punto C dalla ſuperficie della sfera, ſi potrà aſſegnare di leggieri il centro di oſcillazione di eſſa. Poichè eſſendo il centro di oſcillazione diſtante dal punto A, preſo per ſoſtegno per $\frac{2}{5}$ del raggio (*N.* 344.), ſarà il centro di gravità della sfera lontano dal predetto centro per $\frac{2}{5}$ dello ſteſſo raggio. Nell' Ipoteſi adunque, che la sfera vada oſcillando intorno al punto C, chiamata la $AC = l$, per avere la nuova diſtanza del centro di oſcillazione, non ſi avrà che ad inſtituire la proporzione indicata di ſopra (*N.* 342.) [denominata l'aſciſſa, oſſia il raggio $= r$] $\div r + l : r :: \frac{2}{5} \cdot r$ al quarto termine, che ſarà la diſtanza cercata, e che troveraſſi $= \frac{2r^2}{5 \cdot (r+l)}$.

PRO-

PROBLEMA X.

347. Dato un Cono *ABCR* ſoſpeſo nel vertice *A*, fiſſare ſull' aſſe *AD*, il centro *O* di oſcillazione di eſſo (*Fig.*110.).

RISOLUZIONE. Sia l'altezza $AD = a$, il raggio $BD = b$, $AP = x$, e l'ordinata parallela alla baſe, cioè $PM = y$. Dai triangoli ſimili *MPA* e *BDA*, ſi avrà $y = \frac{bx}{a}$, il qual valore, ſurrogato nella formola generale $\frac{S.x^2y^2dx + S\frac{1}{4}y^4dx}{S.xy^2dx}$, ne darà l' eſpreſſione della ricercata diſtanza del centro d' oſcillazione dal vertice *A* del Cono $= \frac{\frac{S.b^2x^4dx}{a^2} + \frac{S.b^4x^4dx}{4a^4}}{\frac{S.b^2x^3dx}{a^2}}$

$= \frac{4a^2b^2x^5}{5.a^2b^2x^4} + \frac{4a^2b^4x^4}{20.b^2x^4a^4} = \frac{ax}{5} + \frac{4.b^2x}{20.a^2}$, e fatto $x = a$, cioè preſa l'intiera altezza *AD* per aſciſſa, ſi troverà il centro d' oſcillazione *O*, diſtante da *A* per $\frac{4}{5}.a + \frac{b^2}{5.a}$.

PROBLEMA XI.

348. Propoſto un Cilindro *ABED*, ſoſpeſo nella metà del diametro *AB*, aſſegnare ſulla retta *CF*, che connette i centri di gravità di tutt' i cerchj paralleli alla baſe, il punto ove cada il centro di oſcillazione di eſſo ſolido (*Fig.* 126.).

RISOLUZIONE. Si chiami l'altezza $CF = a$, ed il raggio $AC = EF = r$, $AP = x$; condotta la *PM* parallela ad *EF*, ſarà pure $PM = EF = r$. Nella formola quindi generale al luogo di y, che eſprime l'ordinata variabile, ſi dovrà ſurrogare la coſtante r, e ſi avrà la cercata diſtan-

za del centro O di oscillazione dal punto di sospensione C

$$= \frac{S.r^3x^3dx + \frac{S.r^4dx}{4}}{S.xr^2dx} = \frac{\frac{r^3x^3}{3} + \frac{r^4x}{4}}{\frac{r^2x^2}{2}} = \frac{\frac{2r^3x^3}{3r^2x^2} + \frac{2r^4x}{4r^2x^2}}{} = \frac{2}{3}.x$$

$+ \frac{2r^2}{4x}$, e presa $x = a = CF$, troverassi $OC = \frac{2}{3}.a + \frac{r^2}{2a}$.

PROBLEMA XII.

349. Trovare il centro di percussione in un corpo, che si arruoti intorno ad un dato asse (*Fig.* 127).

DIMOSTRAZIONE. Si ravvolga un corpo rigido intorno all' asse BCb, e dal centro di gravità G di esso, e dai punti P e p, si conducano allo stesso asse le normali GC, PB, pb. S'intendano in oltre tirate le rette PR, pr normali al piano BGb, e le due BR e br giacenti nel medesimo piano, e s'abbassino quindi dai punti P e p le rette PL e pl, che raggiungano il dato piano, e sieno perpendicolari alle due rette PB e pb. Siccome la velocità angolare è eguale in tutte le particelle del solido, che si arruota; e l'assoluta velocità si trova proporzionale alla distanza dall' asse del moto, se chiameraſſi v la velocità del centro di gravità G, sarà $\frac{PB.v}{CG}$ la velocità di un qualunque punto P, secondo la tangente PL del cerchio descritto col raggio PB, e riferendo tale forza ai lati omologi del triangolo PRB, si potrà questa risolvere nelle due $\frac{BR.v}{CG}$, che sarà normale al piano BGb, e $\frac{PR.v}{CG}$, che si troverà parallela alla direzione del piano suddetto. Siccome poi la forza, che agisce

nella direzione di PL, si può intendere applicata in qualunque punto della retta PL, riportando le forze al piano BGb, si potrà concepire, che da qualunque punto P del solido, nascano due forze nel punto L, l'una $\frac{BR.v}{CG}$ normale al piano suddetto, l'altra $\frac{PR.v}{CG}$ situata nello stesso piano, e parallela a CG. Ciò presupposto, chiamisi il dato solido M, e dM il suo elemento, e siano le due rette LV ed HO parallele all' asse di rivoluzione BCb. Il momento di una particella qualunque P per ravvolgersi intorno ad un altro asse HO parallelo al primo BC, sarà il prodotto della forza $\frac{BR.v.dM}{GC}$ applicata in L alla distanza VO dall' asse HO, ossia sarà tal momento $= \frac{BR}{CG}.\overline{OC-BL}.v.dM$. Ponendo quindi il centro di percussione distante da BC, per l' intervallo OC, affinchè si compensino, e si elidano le forze, che farebbero ravvolgere il solido intorno all' asse HO, dovrà essere $S.\frac{BR}{CG}.OC.v.dM = S.\frac{BR}{CG}.BL.v.dM$. Ma la somma de' momenti è eguale alla somma degli elementi moltiplicata nella distanza di essi dal centro di gravità (*N.* 9.). Dunque sarà $S.BR.dM = M.CG.$, e quindi $OC = \frac{S.BR.BL.dM}{CG.M}$, e per essere $BR.BL = \overline{PB}^2$ s' avrà $OC = \frac{S.\overline{PB}^2.dM}{CG.M}$. Similmente si troverà il momento della forza perpendicolare per far ravvolgere il solido intorno ad un asse posto nel piano GBC, e normale alla data retta HO, che sarà $\frac{S.RB}{CG}.\overline{HO-BC}.v.dM$. Perchè adunque arrestato il

punto O, tutto s' annulli il moto di rotazione, dovrà essere $\frac{S.RB}{CG} HO.v.dM = \frac{S.RB}{GC} CB.v.dM$, d' onde si ricava $HO = \frac{S.RB.BC.dM}{CG.M}$.

Si potrà adunque ricavando i valori di HO, e di OC, determinare nel dato solido il centro di percussione, ossia quel punto, in cui imprimendosi una data forza, con direzione contraria alla prima, cesserà ogni moto di rotazione.

SCOLIO.

350. Si vede quindi chiaramente, come la determinazione dei centri di percussione dipenderà propriamente dalla assoluta velocità, con cui le particelle del solido si ravolgeranno intorno all' asse, la quale nella distanza 1 si è da noi espressa coll' unità, e cangiandosi perciò la velocità nascente dalla forza impressa, poste le altre cose d' altronde pari, cangierassi il centro di percussione. Il centro poi di oscillazione dipenderà dalla gravità acceleratrice di ciascuna particella, la quale, essendo costante nella stessa massa, costante sarà pure il centro di oscillazione, poste le altre cose pari, come sopra.

CAPO DECIMONONO.

DEL MOTO DI ROTAZIONE.

TEOREMA I.

351. SE verrà impressa una forza qualunque ad un solido, la direzione della quale non passi per il centro di gravità di esso; dico che le particelle componenti il solido

non potranno concepire un moto parallelo alla direzione di essa forza (*Fig.* 128.).

DIMOSTRAZIONE. Sia *TRZF* un piano, che divida per mezzo il dato solido, e *BA* una retta, che tagli similmente in due parti eguali il suddetto piano, di cui sia *C* il centro di gravità comune anche al solido. Se s' intenderà impressa la forza nel punto *H* con una direzione normale ad *AB*, il momento di questa forza per muovere il dato solido, la cui resistenza si considera raccolta nel punto *C*, non sarà eguale in tutt' i punti della retta *CB*; ma sarà maggiore nel punto *K*, e minore in *E* (*N.*8.). Il moto adunque delle particelle *E*, *H*, *K*, connesse insieme, non potrà essere uniforme e parallelo alla direzione della forza.

TEOREMA II.

352. Se un dato solido sarà diviso da un piano *ABZ* (*Fig.* 129.) in parti eguali, e simili, e similmente poste, e verrà impressa al solido una forza, che non passi per il centro di sua gravità, e la cui direzione si trovi nel piano *ZB*, concepirà il corpo due moti, l' uno progressivo e l'altro di rotazione intorno ad un asse perpendicolare al piano suddetto, nel centro di gravità *G* di esso.

DIMOSTRAZIONE. Passando la direzione della forza impressa nel piano *ABZ*, è manifesto, che lo stesso piano, e qualunque linea situata in esso, per il moto della forza impressa, non si sturberanno dallo stesso piano immobile (*Ass.* V. Part. I.). La linea adunque *AB*, non potendo investire un moto parallelo alla sua prima posizione (*N.* 351.), dovrà convergere verso qualche punto, situato nello stesso immobile piano, e ravvolgersi quindi verso un dato asse

perpendicolare allo ſteſſo piano ABZ in qualche punto C. Se ſi dividerà quindi il corpo nei ſuoi elementi priſmatici perpendicolari al dato piano, e paralleli all' aſſe di rotazione; è chiaro che le particelle, che compongono queſti elementi, avranno una velocità proporzionale alla diſtanza dall' aſſe del moto (*N.* 8.), e denominando la velocità del centro di gravità $G = v$, la velocità di un altro punto qualunque P ſarà $= \frac{CP.v}{CG}$, e la direzione di eſſa ſarà eſpreſſa per PF normale a PC (*N.* 142.). Si riſolva quindi queſta velocità nelle due $\frac{PH.v}{CG}$, ed $\frac{HC.v}{CG}$, oſſia $v + \frac{GH}{CG} \cdot v$, parallela l' una all' aſſe AB di rotazione, che paſſa per il centro di gravità G e normale l'altra allo ſteſſo aſſe. Condotta la PK normale a GP, le due velocità $\frac{PH}{CG} \cdot v$, e $\frac{GH}{CG} \cdot v$ comporranno la velocità $\frac{GP.v}{CG}$, che avrà la direzione ſteſſa della retta PK. Mentre adunque tutte le particelle comincieranno a ravvolgerſi intorno ad un aſſe normale al piano ABZ nel punto C, concepiranno due moti $v + \frac{GP.v}{CG}$, comune l' uno al centro di gravità, e quindi a tutte le particelle, l' altro proporzionale alla diſtanza PG dal centro di gravità. Adunque il dato piano elementare, e perciò il ſolido intiero, concepirà due moti, l'uno comune e progreſſivo, l' altro di rotazione intorno ad un aſſe normale al piano ABZ nel centro di gravità G.

COROLLARIO I.

353. Il punto C, in cui la velocità di rotazione ſi trova eſpreſſa per $\frac{CG}{CG} \cdot v = v$, eguale cioè alla velocità progreſſiva

del centro di gravità G, deſcriverà col ſuo moto una cicloide ordinaria, in ogni rivoluzione del corpo intorno al centro di gravità G, mentre lo ſpazio percorſo dal centro G ſarà eguale alla periferia del cerchio fatto col raggio GC; laonde la ſemialtezza della Cicloide alla baſe, oſſia il raggio alla periferia, ſarà come CG allo ſpazio percorſo dal centro di gravità G nel tempo d'una rivoluzione. Gli altri punti deſcriveranno altre Epicicloidi allungate od abbreviate, ſecondocchè la loro velocità, ſarà maggiore o minore di quella del punto C.

COROLLARIO II.

354. Se un dato punto C del ſolido ſarà fiſſo, reſtando impedito il moto progreſſivo del centro di gravità, ſolo rimarrà il moto di rotazione intorno allo ſteſſo punto C, il qual moto ſarà proporzionale alla forza impreſſa, ed alla diſtanza da C, a cui s' imprimerà la ſteſſa forza.

PROBLEMA I.

355. Dato un ſolido, che incominci a ravvolgerſi intorno ad un dato aſſe, trovare la ſomma dei momenti di tutte le particelle, conſiderata la loro maſſa, la loro velocità, e la diſtanza di ciaſcuna di eſſe dall'aſſe di rotazione (*Fig.*130.).

RISOLUZIONE. Si concepiſca, che un corpo M colla velocità V, e con una quantità quindi di moto $= MV$ agiſca contro ad un altro corpo qualunque nel punto O, di maniera che cominci queſto ad arruotarſi intorno ad un aſſe perpendicolare al piano PCO nel punto C. Chiara coſa è che ſe nello ſteſſo punto O, ſi imprimeſſe una quantità

di moto $= MV$, e con direzione affatto contraria alla prima, si estinguerebbe tutto il moto di rotazione, che se continuandosi il moto rotatorio di già concepito, si assumerà qualunque elemento prismatico P, e si denominerà v la velocità di un elemento situato alla distanza 1 dall' asse di rivoluzione, sarà $PC.v$ la velocità, e $PC.P.v$ il momento di esso elemento secondo la direzione PK normale a PC. Col centro C e col raggio OC si descriva l'arco di cerchio OF, che tagli la PK in F, e s' intenda applicata la forza $PC.P.v$ in F, e risolvasi nelle due, l' una delle quali agisca secondo la direzione del raggio FC, e l' altra sia normale allo stesso raggio. Ciò posto, la forza totale alla forza perpendicolare al raggio, sarà come $FK : FZ$, ossia $:: FC : PC$, cioè la forza perpendicolare sarà $= \frac{P.\overline{PC}^2}{FC} . v$. Ora questa forza dovrà agire allo stesso modo o si applichi in O, od in F alla stessa distanza da C, e con direzioni perpendicolari agli stessi raggi OC ed FC (*N.* 352.). Il movimento adunque di rotazione non potrà essere tolto, se non se applicando al punto O una forza eguale e contraria alla somma di tutt' i momenti $\frac{\overline{PC}^2 . P . v}{OC} = \frac{S.\overline{PC}^2 P.v}{OC}$, e perciò dovrà essere $MV = \frac{S.\overline{PC}^2 P.v}{OC}$, ossia $M.V.OC = S.\overline{PC}^2 . P . v$, ed il momento quindi totale, ossia l' intiera quantità di moto sarà eguale alla somma dei prodotti di ciascun elemento, per la distanza PC, e per la velocità $PC.v$.

COROLLARIO.

356. Se si concepirà, che il punto C si allontani per modo dai punti stabili O e P, che la differenza tra PC ed OC sia

ſia un infiniteſimo, ſi potrà in tal caſo prendere $PC = OC$, ed i movimenti dei punti O e P avranno direzioni tra loro parallele, oſſia cangieraſſi il moto di rotazione in moto progreſſivo. La formola quindi ſuperiore. $M.OC.V = S.P.\overline{PC}^2.v$ preſa PC eguale all' unità, riſulterà $MV = S.P.v$, e ſe ne potrà quindi dedurre, che ſiccome nel moto dei corpi, che ſi percuotono ſenza oſtacolo, rimane la ſteſſa quantità di moto prima e dopo l'urto, così nei corpi, che concepiſcono il moto di rotazione, rimane ſempre la ſteſſa quantità dei momenti preſi nel ſenſo di ſopra indicato.

PROBLEMA II.

357. Determinare il moto progreſſivo, e quello di rotazione intorno ad un aſſe dato di poſizione in un corpo qualunque regolare, moſſo per una forza, la cui direzione non paſſi per il centro di gravità di eſſo (*Fig.* 129.).

RISOLUZIONE. Si chiami F la forza impreſſa al mobile nel punto O, ed v la velocità, con cui il centro di gravità G incomincia a muoverſi intorno ad un aſſe normale al piano PCO nel punto C, ſarà $\frac{PC.v}{CG}$ la velocità di rotazione di un elemento priſmatico conſiderato in P, ed il ſuo momento $= \frac{P.\overline{PC}^2}{CG}.v$, e la ſomma dei momenti di tutt' i piccioli priſmi, oſſia del ſolido, ſarà $= \frac{S.P.\overline{PC}^2}{CG}.v = F.OC$ (*N.* 355.). Ma è ſuppoſto il punto O centro di percuſſione, e ſi ha quindi $OC = \frac{S.P.\overline{PC}^2}{CG.M}$ (*N.*349.). Ridotti adunque i termini, ſarà $\frac{F}{M} = v$, ed eſſendo v la velo-

cità , con cui comincia il centro di gravità a ravvolgerſi intorno al punto C , eſprime evidentemente la velocità , con cui tutte le particelle di eſſo mobile ſi avanzano in linea retta , ed $\frac{F}{M}$ eſprime la forza impreſſa nel centro. Adunque la velocità , con cui ſi muove il centro di gravità di un corpo , oſſia l'intiero ſolido , ſecondo la direzione della forza impreſſa in O , ſarà la ſteſſa che riſulterebbe imprimendo la ſteſſa forza nel centro di gravità G di eſſo corpo , con direzione parallela alla prima . Se ſi intenderanno poi applicate nello ſteſſo tempo ai punti O e G due eguali forze F e $-F$ con direzioni contrarie e parallele , per la prima forza F , tutte le particelle del mobile acquiſteranno la comune velocità v di projezione , e di più la velocità $\frac{GP}{CG}.v$ di rotazione intorno ad un aſſe perpendicolare al piano ABZ nel punto G , oſſia nel centro di gravità del ſolido (*N.*352.). La forza poi $-F$ produrrebbe la velocità $-v$, che diſtruggerebbe la velocità v di projezione , e il centro di gravità G rimarrebbe immobile , ſola reſtando la velocità di rotazione $\frac{GP}{CG}.v$ proporzionale alla diſtanza del centro di gravità , e tendente di quà e di là da eſſo centro in parti contrarie . Il movimento adunque di rotazione ſarà lo ſteſſo che ſi avrebbe reſtando fiſſo il centro di gravità , ſe tutta la forza impreſſa s' impiegaſſe nel produrre il ſolo moto di rotazione .

COROLLARIO I.

358. Dovendo tutte le particelle del corpo , che s'arruota intorno ad un dato aſſe , che paſſa per il centro di gravità ,

deſcrivere in tempi eguali cerchj ineguali, le forze centrifughe di eſſe particelle ſaranno proporzionali ai raggi dei riſpettivi loro cerchj. Se l'aſſe adunque *AB* e il piano, il quale taglia il corpo in parti eguali e ſimili, e ſimilmente poſte, e in cui cade la direzione della forza impreſſa nel punto *O*, paſſeranno pel centro *G* di gravità del ſolido omogeneo, la ſomma de' momenti delle particelle poſte di quà e di là dall' aſſe *AB* ſaranno eguali, e le forze centrifughe di quà e di là dal detto aſſe ſaranno dovunque in equilibrio.

COROLLARIO II.

359. Se ſi riſolverà (*Fig.* 131.) la forza *PR*, con cui una particella *P* tenta di allontanarſi dall' aſſe, nelle due forze *PH* parallela all' aſſe di rivoluzione *LI*, ed *HR* perpendicolare al piano *LIAB*, ſarà *PH.RG.P* il momento della propoſta particella per ravvolgerſi intorno ad un aſſe giacente nel piano *LAB*, e normale ad *LI*, e *P.RG.HR* ſarà il momento della ſteſſa particella per arruotarſi intorno ad un aſſe normale al piano *ABL* nel punto *G*. Quindi ſe queſte forze centrifughe ed i momenti di eſſe di quà e di là dall' aſſe *LI* di rivoluzione, o dal piano tradotto normale allo ſteſſo aſſe per il centro di gravità *G*, in eguali diſtanze ſaranno eguali, l'aſſe *LI* non ſi potrà inclinare nè verſo *AB*, nè verſo un aſſe normale al piano *ABL* nel punto *G*, e il moto di rotazione ſi farà coſtantemente intorno al primiero aſſe di rivoluzione. Le ſfere quindi intorno ai diametri, le ſferoidi intorno agli aſſi del piano elittico, da cui ſono generate, potranno aggirarſi invariabilmente, eſſendo eguali le ſomme dei momenti delle particelle ſituate di quà e di là dagli aſſi mentovati.

COROLLARIO III.

360. Che ſe, paſſando l'aſſe di rotazione per il centro di gravità di un ſolido, la ſomma dei momenti delle particelle, che lo compongono, poſte di quà e di là dal detto aſſe, o da un piano normale ad eſſo, non ſarà eguale, non potrà l'aſſe conſervare il ſuo paralleliſmo, da cui ripiegandoſi, farà in modo che ne naſca un nuovo aſſe di rivoluzione, e quindi altri ne ſuccederanno, finchè il moto di rotazione verrà a farſi intorno ad un aſſe, il quale ſia perpendicolare ad un piano, che divida in parti eguali, e ſimili il ſolido, e paſſi in oltre per il centro di gravità *G* (*N.* 352.).

COROLLARIO IV.

361. Quindi, ſe una ſferoide *BALl* compreſſa nei poli *L* ed *l* (*Fig.* 132.) ſi aggirerà intorno ad un diametro *XZ*, e preſe le eguali diſtanze dal centro *CP* e *Cp*, ed alzati i perpendicoli *PO* e *po*, la ſomma dei momenti *P.OP.PC* ſarà maggiore della ſomma *P.op.Cp*, ed il momento perciò delle forze centrifughe riuſcirà maggiore nel quadrante *XCS*, che nel quadrante *ZCS*, ne dovrà naſcere un altro moto di rotazione intorno ad altro aſſe normale al piano *ABLl* nel punto *C* (*N.* 352.), e ſi inclinerà il moto rotatorio da *A* verſo *S*. La direzione poi di queſto moto ſarebbe contraria, ſe la ſferoide foſſe rilevata nei poli *L* ed *l*, e compreſſa nei punti *A* e *B*.

PROBLEMA III.

362. Trovare la velocità del moto rotatorio di una sfera intorno ad un ſuo diametro, prodotta da una forza F, la quale ſia impreſſa all' eſtremità di un altro diametro normale al primo (*Fig.* 133.).

RISOLUZIONE. Ravvolgaſi un piano circolare intorno ad un aſſe perpendicolare, il quale paſſi per il centro di ſua gravità, e ſia la velocità della rotazione alla diſtanza 1 eſpreſſa per l' unità; preſo un qualſivoglia punto ſituato alla diſtanza x dal centro di rotazione, avrà ſimilmente una velocità $= x$, e aſſumendoſi la ragione del raggio alla periferia quella di $1 : c$, ſarà cx la periferia deſcritta col raggio variabile x, ed il momento di eſſa $= cx^2$. S'avrà in oltre il momento elementare dell' area di eſſo cerchio $= cx^2 dx$, ed il totale momento di eſſa area, ſarà $= \frac{cx^4}{4}$. Supponendoſi quindi compita la rivoluzione del ſemicerchio ALB intorno ad AB, e generata una sfera, a cui ſia impreſſa nel punto L la forza F, fatto il raggio $CL = r$, $CP = z$, $Pp = dz$ il momento corriſpondente all' elemento Pp ſarà $= \frac{c}{4}.\overline{Pm}^4.dz$, e ſurrogato il valore di $\overline{Pm}^2 = r^2 - z^2$, ſi troverà lo ſteſſo momento $= \frac{c}{4}.dz.(r^4 - 2r^2z^2 + z^4)$, e integrando ſarà $\frac{c}{4}.\left(r^4z - \frac{2r^2z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right)$ il momento del ſegmento corriſpondente all' altezza CP, e $\frac{2}{15}.cr^5$ il momento dell' emiſfero, e $\frac{4}{15}.cr^5$ quello dell' intiera sfera. Denominando poi v la ve-

locità del punto più ſublime L del ſemicerchio generatore, ſarà $\frac{v}{r}$ la velocità di un altro punto ſituato alla diſtanza 1, e ſoſtituito queſto valore, in vece dell' unità della velocità, ſarà il momento dell' intiera sfera $= \frac{4}{15}.cr^4v$. Dovendo poi eſſere $F.r = \frac{4}{15}.cr^4.v$ (*N.* 455.), ſi avrà $v = \frac{15.F}{4.cr^4}$, ed eſſendo cr^4 la ſolidità di un cilindro, il cui raggio ſia r, la periferia $= rc$, l'altezza $= 2r$, e la ſolidità quindi della sfera inſcritta $= \frac{2}{3}cr^3$, fatta tale eſpreſſione $= m$, ſi avrà finalmente il riſultato $v = \frac{5.F}{2.m}$.

COROLLARIO I.

363. Se ſi ravvolgerà intorno all' aſſe BA una ſferoide compreſſa nei poli B ed A, ſuppoſto il maggior ſemiaſſe $= a$, i momenti dei cerchj paralleli, che ſi deſcriveranno dai raggi PM e Pm nella sfera inſcritta e nella ſferoide, ſaranno tra loro :: $\overline{CR}^4 : \overline{CL}^4 :: a^4 : r^4$, la qual ragione eſſendo coſtante per tutte le ſezioni perpendicolari all' aſſe, ſarà il momento di tutta la ſferoide intorno all' aſſe BA $= \frac{4}{15}.ca^4v$; e chiamando la velocità maſſima del punto R, oſſia nella diſtanza $a = v$, ſarà la velocità alla diſtanza r $= \frac{vr}{a}$, ſoſtituito il qual valore nel luogo di v, ſarà il momento della data ſferoide ravvolgenteſi intorno al minor aſſe $AB = \frac{4}{15}.ca^3rv$.

COROLLARIO II.

364. Se in vece poi di applicarſi la forza nel punto ſublime L della sfera, s'intenderà applicata ſull' equatore della sferoide nel punto R, ſarà ancora $F.a = \frac{4}{15}.ca^4\upsilon r$, oſſia $\upsilon = \frac{15.F}{4.ca^4r}$. Le velocità quindi angolari, che colla ſteſſa forza F, applicata in R o in L, ſi poſſono produrre nella sferoide e nella sfera, ſaranno tra loro :: $\frac{15.F}{4.cr^4}$: $\frac{15.F}{4c.a^4r}$, oſſia :: $a^4 : r^4$, cioè in ragione duplicata del grand' aſſe della sferoide al minore.

TEOREMA III.

365. Se ad un piano qualunque γyZz (*Fig.*134.) s'imprimeranno due forze, l'una delle quali varrebbe a produrre il moto di rotazione intorno all' aſſe Zz, e l'altra intorno all' aſſe γy, ſe foſſero ſeparatamente impreſſe, ſuppoſte le velocità angolari de' due moti nella ragione di $C : 1$, e conſiderandoſi agire nello ſteſſo tempo le due forze, dovrà il piano ravvolgerſi intorno ad un terzo aſſe MTm poſto nello ſteſſo piano, e inclinato agli aſſi Zz ed γy, per gli angoli MTZ ed $MT\gamma$, i ſeni dei quali ſaranno :: $1 : C$.

DIMOSTRAZIONE. Si concepiſcano contrarj i due moti di rotazione, che ſi avrebbero nei due ſettori $ZT\gamma$ e zTy in vigore delle due forze ſeparatamente impreſſe, e ſiano gli ſteſſi moti coſpiranti nei due ſettori ZTy ed yTZ. Prendaſi una intermedia MTm, tale che condotte le due

normali ML all' asse Zz, ed MN sull' asse Yy, sia $1 : C :: ML : MN$. La velocità assoluta del punto M intorno all' asse Zz sarà $= ML.C$, e la velocità dello stesso punto M intorno all' asse Yy sarà $= MN$, e per essere $MN = ML.C$ le due velocità di rotazione intorno ad MTm, si distruggeranno vicendevolmente. La velocità ancora composta di qualsisia altro punto R sarà proporzionale alla distanza dalla stessa retta MTm. Poichè s'intendano condotte sopra le rette MT, ZT, YT le normali RO, RA, NG ed OD, RB e PE, e sopra PE la RV, esprimerà RO la velocità del punto R intorno all' asse Yy, e la velocità di rotazione intorno all' asse Zz sarà $= BR.C = \frac{BR.MN}{ML} = BR.\frac{PO}{PE} = \overline{PE \mp PV}.\frac{PO}{PE} = PO \mp PV.\frac{MN}{ML}$, e la differenza o la somma delle due velocità sarà $RP + PV.\frac{MN}{ML}$ (elidendosi ancora nella somma la velocità comune PO, ma contraria). Per i triangoli poi simili RPA e PTO, ossia RPA ed MNT, sarà $RP = \frac{TM.RA}{TN}$. Similmente essendo eguali gli angoli RPV ed ROD, sarà pure l'angolo $PRV = DOT = TNG$, e dai due triangoli simili RPV e GTN, si avrà $PV = \frac{TG.RP}{TN} = \frac{TG.TM.RA}{\overline{TN}^2}$. La somma adunque o la differenza delle due velocità sarà $= \frac{TM.RA}{TN} + \frac{TG.TM.RA}{TN.TN}.\frac{MN}{ML}$, e fatto il raggio $TM = 1$, e sostituita al luogo di $\frac{MN}{ML}$ la quantità C, e così YTZ al luogo di $\frac{TG}{TN}$ risulterà la stessa somma o dif-

o differenza delle due velocità $= \overline{RA} \times \frac{1 + C.\text{cos.}\, YTZ}{\text{cos.}\, MTY}$, dalla quale espressione, attesa la costante C, e i due dati angoli MTY ed YTZ, si manifesta che tutta la velocità composta della rotazione farà proporzionale alla distanza RA della retta MTm, la quale sarà perciò l'asse di rotazione del proposto piano.

COROLLARIO I.

366. Poichè cos. YTZ è $=$ cos. $\overline{YTM + MTZ}$, giusta le formole Trigonometriche per la somma di due coseni, sarà cos. $YTZ = \frac{TN.TL - MN.ML}{\overline{TM}^2}$, e l'espressione quindi di tutta la composta velocità della rotazione, si troverà $= RA \times \frac{TM}{TN}.\ 1 + \frac{(TN.TL - MN.ML)}{\overline{TM}^2}.\frac{MN}{ML}$; ma $\frac{TM}{TN} - \frac{\overline{MN}^2}{TN.TM}$ è $= \frac{\overline{TM}^2 - \overline{MN}^2}{TN^2.TM} \times TN = \frac{TN}{TM}$. Adunque si avrà l'espressione della velocità composta $= \frac{TN}{TM} + \frac{MN.TL}{TM.ML} \times RA =$ $\frac{TN.ML + MN.TL}{TM.ML} \times RA = \frac{\text{sen.}\, MTZ + MTY}{\text{sen.}\, MTZ} \times RA =$ $\frac{\text{sen.}\, YTZ}{\text{sen.}\, MTZ}.RA$.

COROLLARIO II.

367. Presa quindi sulla direzione TZ la TX, tale che sia $1 : C :: TY : TX$, condotta la YX, se per il punto T si tradurrà una MTm parallela ad XY, sarà MTm l'asse

della compoſta rotazione. Poichè ſi avrà $TY : TX ::$ ſen. TIX : ſen. $TXI :: $ ſen. MTY : ſen. $MTZ :: MN : ML$, e i ſeni di deviazione del nuovo aſſe compoſto di rotazione, per rapporto ai due primi, ſaranno reciprocamente proporzionali alle velocità angolari, concepite intorno ai medeſimi aſſi.

COROLLARIO III.

368. Se l'angolo YTZ formato dai primi due aſſi della rotazione, interſecantiſi nel punto T, ſarà retto, riuſcirà la ML parallela ad NT, e l'angolo LMN ſarà pure retto, e ſarà $ML = TN$. Si avrà dunque $ML : MN :: 1 : \frac{MN}{ML}$, che ſarà l'eſpreſſione della tangente dell'angolo di deviazione MTN degli aſſi Mm ed Yy.

COROLLARIO IV.

369. Siccome poi l'aſſoluta velocità del punto R intorno all'aſſe MTm, ſi è trovata $= \frac{\text{ſen. } YTZ \cdot RA}{\text{ſen. } MTZ}$, dividendo queſta eſpreſſione per RA, ſi avrà la velocità angolare di tutta la rotazione compoſta $= \frac{\text{ſen. } YTZ}{\text{ſen. } MTZ}$, ed eſſendoſi ſuppoſta la velocità angolare intorno all'aſſe $Yy = 1$, e intorno all'aſſe $Zz = C = \frac{MN}{ML} = \frac{\text{ſen. } MTY}{\text{ſen. } MTZ}$, ſaranno le angolari velocità intorno agli aſſi Mm, Yy, Zz proporzionali ai ſeni degli angoli YTZ, MTZ, MTY.

COROLLARIO V.

370. Nello ſteſſo modo poi, con cui i due moti di rotazione intorno agli aſſi *Yy* e *Zz* ſi compongono nel ſolo moto di rotazione intorno all' aſſe *MTm*; così il moto compoſto, e rotatorio intorno ad *MTm* ſi potrà riſolvere nei due intorno agli aſſi *Yy* e *Zz*, ai quali dovrà equivalere, appunto come ſi è provato ſuccedere nei moti rettilinei (*N.* 28; 30.), e la totale velocità della prima rotazione alle angolari velocità della rotazione riſoluta, ſarà nella ſteſſa ragione, che paſſa tra il ſeno dell' angolo *YTZ* formato dai due primi aſſi, ai ſeni degli angoli *MTZ* ed *MTY*, che determinano l'inclinazione dei due primi aſſi col terzo *MTm*.

TEOREMA IV.

371. Se un punto qualunque *F* preſo fuori del piano *Zz Yy* (*Fig.* 134.) ſarà ſpinto ſimilmente da due forze, per l' una delle quali ſi ravvolgerebbe intorno all' aſſe *Zz*, e per l'altra intorno all' aſſe *Yy* con egual moto angolare dello ſteſſo piano, abbaſſata una *FR* normale al piano ſuddetto, le due velocità del punto *F* equivaleranno a tre altre, alla velocità cioè compoſta come avanti nel punto *R*, ed alle due velocità eſpreſſe, l'una dalla retta *FR*, e l'altra da *FR.C*, la prima delle quali avrà una direzione parallela alla retta *RO*, e l'altra a *BR*.

DIMOSTRAZIONE. Si abbaſſi (*Fig.* 135.) dal punto *F* all' aſſe *Yy* la perpendicolare *FO*, e ſia *Ff* un arco circolare, deſcritto dallo ſteſſo punto *F* col moto di rotazione

concepito intorno ad Yy. La velocità del punto F nella direzione della tangente FK, si potrà risolvere in altre due, l'una secondo la direzione FR, e l'altra secondo quella di FE, e venendo espressa la velocità intorno all' asse Yy colla distanza FO, la velocità che agirà secondo la direzione FR, sarà $= \frac{FO.FR}{KF} = RO$, cioè eguale a quella che avrebbe il punto R, se dovesse ravvolgersi intorno al punto O; e la velocità secondo $FE = KR$ avrà una direzione parallela ad RO. Nello stesso modo si proverà che la velocità del punto F intorno all' asse Zz (*Fig.* 134.) si potrà risolvere in due altre, l'una delle quali sarà $BR.C$ esprimente la velocità dello stesso punto F intorno all' asse Zz, e l'altra $FR.C$, la quale avrà una direzione parallela a BR. Ma le due velocità RO e $BR.C$ del punto R intorno ai due assi Yy e Zz compongono la velocità $\frac{\text{sen.}YTZ.RA}{\text{sen.}MTZ}$, con cui lo stesso punto si ravvolge intorno ad un terzo asse MTm (*N.* 366.). Adunque le due velocità del punto F, preso fuori del piano $YyZz$, e animato dallo stesso moto angolare intorno agli assi Yy e Zz, equivaleranno a tre altre velocità, cioè alla composta di R, ed alle due FR ed $FR.C$, le direzioni delle quali sieno parallele l'una ad RO e l'altra a BR.

COROLLARIO.

372. Le velocità FR ed $FR.C$, che hanno tra loro la ragione di $1 : C$, avranno pure tra loro il rapporto di $MN : ML$, ossia di $EP : OP$. Avendosi poi nel quadrilatero $TPEO$ i due angoli opposti TFP e POT retti, si potrà ad esso circonscrivere un cerchio, e quindi gli an-

goli *PEO* e *PTO* ſaranno eguali. Condotta poi la retta *CA* parallela a *PE*, ſi avrà l'angolo *PTO* = *CAP*, e ſaranno ſimili i triangoli *RAC* e *EPO*. Poichè dalla ſomiglianza dei due triangoli *RPA* e *POT*, ſi ha l'angolo *ARP* = *PTO* = *PEO*; l'angolo in oltre *EPO* è = *APC* + *PAC*, i quali angoli preſi inſieme ſono eguali all'eſterno *RCA*. Adunque *RCA* ſarà = *EPO*, e ſi avrà l'analogia *PE* : *PO* :: *RC* : *CA*, oſſia le velocità eſpreſſe per *FR* ed *FR.C*, ſaranno proporzionali alle rette *RC*, e *CA*. L'aſſe adunque di rotazione per la forza compoſta nel punto *R* ſarà lo ſteſſo *MTm* ſituato nel piano degli aſſi *Zz* ed *Yy* (*N.* 365.), e da queſti devierà in vigore delle altre due forze per ſeni, che ſaranno reciprocamente proporzionali alle velocità *RC* e *CA* concepite intorno agli ſteſſi aſſi.

PROBLEMA IV.

373. Aſſegnare il centro di percuſſione in un corpo poſto in moto da una forza, che non paſſi colla ſua direzione pel centro di gravità di eſſo (*Fig.* 127.).

RISOLUZIONE. Il moto di un corpo, ſpinto da una forza nel modo indicato, ſi riduce a due moti, l'uno di rotazione intorno ad un aſſe dato di poſizione, l'altro progreſſivo e normale alla direzione dell'aſſe medeſimo (*N.* 352.). Chiamiſi v la velocità di rotazione del centro di gravità *G* intorno all'aſſe *BCb*, e π la velocità progreſſiva, ſarà $\frac{BR.v}{CG}$ la velocità concepita da qualunque particella *P* in direzione normale al piano *BCG*, e $\frac{PR.v}{CG}$ la velocità parallela allo ſteſſo piano ed alla retta *CG*. Sia *H* il punto, in cui imprimendo

una ſola forza, poſſa ceſſare ogni moto, e riprodurſi lo ſteſſo, applicando una egual forza in parte contraria. Ritenendo quanto ſi è detto ſuperiormente (*N.* 349.), e ſuppoſte le forze di tutte le particelle operanti nella direzione di *PL* normale al raggio *PB*, e riferite al piano *BCb*, chiamato *M* il ſolido, e *dM* il ſuo elemento, la forza di ciaſcuna particella *P* per inclinare il corpo intorno ad un aſſe *HO* poſto nel piano *BCG*, e parallelo all' aſſe *Bb*, ſarà eſpreſſa per $\frac{BR}{CG}.(OC-BL).v.dM$, e ſarà $\frac{BR}{CG}.(HO-BC).v.dM$ il momento, da cui ſarà ripiegato il corpo verſo un altro aſſe normale alla retta *HO*, e parallelo ad *OC*. Poſto adunque in *H* il centro di percuſſione, e impedito il moto dello ſteſſo punto, perchè non rimanga alcun moto intorno ai mentovati aſſi, dovrà eſſere $OC = BL$, oſſia $S.BR.OC.dM = S.BR.BL.dM = S.\overline{PB}^2.dM$ ed $OC = \frac{S.\overline{PB}^2.dM}{CG.M}$, ed in oltre dovrà pur eſſere $S.BR.HO.dM = S.BR.BC.dM$ donde s'avrà il valore di $HO = \frac{S.BR.BC.dM}{CG.M}$. Avendoſi in oltre eſpreſſa per $\frac{PR.v}{CG}$ la velocità di un qualunque punto *P* in direzione parallela alla retta *CG*, ſarà $\frac{PR}{CG}.(HO-BC).v.dM$ il momento di ciaſcuna particella per far ravvolgere il corpo intorno ad un aſſe normale al piano *BCG* nel punto *H*. Finalmente la velocità di qualunque particella *P* in direzione parallela all' aſſe *BC*, cioè π, produce la quantità comune di moto $M\pi$, e la forza ad eſſa equivalente ſi deve drizzare al centro di gravità con direzione parallela allo ſteſſo aſſe. Il momento adunque che ne naſcerà per far

ravvolgere il corpo intorno all' aſſe che paſſa per H normale al piano BCG, ſarà $M.\pi.GO$. Perchè adunque arreſtato il punto H non s'abbia alcun movimento di rotazione intorno ad alcuno dei tre aſſi indicati, che ſi tagliano in H ad angoli retti, e perchè rimanga il corpo M in quiete è neceſſario che queſti momenti ſi ragguaglino in contraria direzione, e che ſia $\frac{S.PR}{CG}.(BC-HO).v.dM = M.\pi.GO$. Diſtruggendoſi poi nella rotazione la ſomma di tutte le PR ſopra e ſotto del piano BCG, che paſſa per il centro di gravità, atteſe le coſtanti HO, CG ed v, ſarà $S.\frac{PR}{CG}.HO.v.dM = 0$, e quindi $GO = \frac{S.PR.BC.v.dM}{CG.\pi.M}$, e le tre equazioni atte a determinare il centro di percuſſione in un corpo comunque ſpinto e moſſo, ſaranno le ſeguenti: I. $OC = \frac{S.\overline{PB}^2.dM}{CG.M}$. II. $HO = \frac{S.BR.BC.dM}{CG.M}$. III. $GO = \frac{S.PR.BC.v.dM}{CG.\pi.M}$.

SCOLIO.

374. La Teoria del moto di rotazione da noi finora eſpoſta, di cui ſi deve il primo merito al Celebre Matematico Giovanni Bernoulli, è ſtata arricchita ed eſteſa dai Chiariſſimi Lumi di queſto ſecolo, Dalembert, Eulero, Mozzi e Friſio. L'idea che mi ſono prefiſſo in queſta mia Opera, di formare un Corſo d'Inſtituzioni Meccaniche, mi ha limitato a porre ſoltanto i Teoremi principali, che poſſono ſervire alla Fiſica della terra e del cielo. Quelli de' miei Lettori, che vorranno indagare con occhio più curioſo queſta materia, potranno ſoddisfarſi nelle Opere e Trattati particolari dei ſopralodati illuſtri Scrittori.

CAPO VENTESIMO.

DELLA RIVOLUZIONE DI DUE O PIU' CORPI

che ſi attraggono vicendevolmente.

DEFINIZIONI.

I. NOdi ſi chiamano gli eſtremi punti della linea *EI* (*Fig.* 139.) di comune interſezione dei piani *EIL* ed *EIA'S* Queſti nodi ſi dicono eſſere nelle quadrature, allorchè ſi trovano nella retta *CD* normale ad *ST* nel punto *T*. Se la comune linea d'interſezione dei piani *SFXT* ed *ABDC* cadrà in *AB*, il punto o nodo *A*, che reſta intermedio ai corpi *S* e *T*, ſi dice eſſere in congiunzione riſpetto ai corpi *S* e *T*, e il punto *B*, che cade oltre il corpo *T*, ſi dice eſſere in oppoſizione, e i luoghi *B* ed *A*, con nome comune chiamanſi ancora *Siſigie*.

II. *Moto in lunghezza* ſi dice quello, con cui il corpo *L* ſi ravvolge nella ſua orbita *AEIB*. *Moto in larghezza* chiamaſi quello, con cui lo ſteſſo corpo *L* ſi accoſta o ſi diſcoſta da un piano fiſſo *FSXT*, il quale interſeca l'orbita deſcritta dallo ſteſſo mobile *L*.

III. *Prima quadratura* degli apſidi di un' orbita elittica ſi dice quella, in cui un corpo, che ſi ravvolge in eſſa, tende col ſuo moto dalla ſomma all' ima apſide, che rimane più proſſima al fuoco.

TEOREMA I.

375. Se due corpi *M* ed *m* ſaranno ſpinti con eguali forze projettizie, e con direzioni parallele, ma contrarie; le forze di loro attrazione, ſuppoſte proporzionali alle maſſe, ſi diri-

ſi dirigeranno tuttora verſo il comune centro di loro gravità (*Fig.* 136.).

DIMOSTRAZIONE. Venendo ſpinti i due dati corpi con forze di projezione eguali, le velocità di eſſi ſaranno in ragione inverſa delle maſſe (*N.* 12.). Diviſa perciò la retta *Mm* in ragione reciproca delle due maſſe *M* ed *m*, nel punto *C* della diviſione vi avrà il centro di loro gravità (*N.* 22.), e ſaranno le ſopraddette velocità in ragione ancora di *mC* : *MC*. Se ſi prenderà poi ſulla direzione *AM* della forza impreſſa al corpo *M* l'infiniteſima *MT*, e ſi condurrà per il centro *C* la retta *TC*, che vada ad incontrare in *t* la direzione della forza impreſſa all' altro mobile *m*, ſaranno ſimili i due triangoli *MTC* ed *mtC*, e ſarà *MT* : *mt* :: *MC* : *mC*. Le velocità adunque dei due corpi ſaranno ancora come le rette *mt* ed *MT*, e dovendo gli ſpazj percorſi nello ſteſſo tempo eſſere proporzionali alle velocità (*N.* 2.), nello iſtante, in cui ſi percorrerà dall' un corpo la retta *MT*, ſi traſcorrerà dall' altro l'infiniteſima *mt*. La retta adunque che connetterà i centri di gravità dei due mobili, paſſerà per il centro di gravità *C*. Ma ſiccome nello ſteſſo tempo, in cui comincia ad agire la forza impreſſa, eſercita la ſua energia la vicendevole attrazione dei due corpi, ſe ſi dinoteranno le velocità iniziali dipendenti dalla mutua gravità per le infiniteſime *VT* ed *vt*, congiunte le forze, ſi percorreranno ancora in egual tempo gli archetti *VM* ed *vm*, e la retta *VCv* dimoſtrerà ancora le direzioni di loro forze centripete verſo lo ſteſſo punto *C*.

Prolungandoſi ancora il latercolo *MV* della Curva in *L*, preſa *LV* = *VM*, e prodotto indefinitamente l'archetto *mv*, e condotta per *C* la retta *Ll*, ſi dimoſtrerà ſimilmente che

ſaranno traſcorſe in egual tempo le rette *VL* ed *vl*. Poichè eſſendo ſimili i triangoli *TMC* e *tmc*, e le rette *TV* e *tv* proporzionali alle rette *CM* e *Cm*, ſaranno pure ſimili tra loro i triangoli *VCM* ed *vcm*, e conſeguentemente i due *VCL* e *vcl*, e le rette *VL* ed *vl* ſaranno proporzionali alle rette *VC* ed *vC*, oſſia alle due *MC* ed *mC*, e ſi avrà quindi *VL* : *vl* :: *MT* : *mt*. Siccome adunque gli ſpazj *MT* ed *mt* ſono traſcorſi in egual tempo, in vigore della forza impreſſa, ſaranno pure in un medeſimo tempo od iſtante percorſe le rette *VL* ed *vl*, e preſe le infinitesime porzioni *LP* ed *lp* proporzionali alle riſpettive forze attratrici, ſi traſcorreranno nel medeſimo iſtante ancora i minimi archi *PV* e *pv*. Adunque i due corpi *M* ed *m*, ſituati ancora in *P* e *p*, avranno le forze loro centripete dirette allo ſteſſo centro *C*. Un ſimile diſcorſo ſi può ripetere finchè ſiano eſaurite le due Curve *SM* ed *sm*. Generalmente adunque ſe due corpi ec.

TEOREMA II.

376. Poſte le ſteſſe coſe di ſopra, dico che i due corpi *M* ed *m* deſcriveranno due Curve ſimili.

DIMOSTRAZIONE. Per la ſomiglianza dei triangoli *VCM* ed *vcm* ſta *VM* : *VC* :: *vm* : *vC*, e ſimilmente per i triangoli ſimili *VPC* ed *vpc* ſi ha l'analogia *VP* : *VC* :: *vp* : *vC*. Sarà adunque *VM* : *VP* :: *vm* : *vp*. Per la ſomiglianza dei mentovati triangoli, l'angolo *MVC* ſarà pure eguale al corriſpondente *mvC*, e gli alterni *PVC* e *pvC* eguali, e perciò il totale angolo *MVP* ſi troverà = *mvp*. Sono adunque gl' infinitesimi latercoli delle Curve *MV* ed *VP*, *mv* ed *vp* intorno ad angoli eguali tra loro proporzionali, il che ve-

rificandoſi di tutte le altre conſimili lineette, che compongono le due Curve *MS* ed *ms* (*Supp.* II.), ſi rende manifeſto, che le due accennate Curve deſcritte dai due dati corpi ſaranno onninamente ſimili tra loro.

COROLLARIO I.

377. Trovandoſi eguali tuttora i triangoli *VMC*, *VLC* ed *vmC*, *vlC*, i quali inſiſtendo ad egual baſe, hanno pure la medeſima altezza, e potendoſi confondere gl' infinitesimi lati *LV* ed *lv* con gli archetti *PV* e *pv* delle Curve (*Aſs.* I. Part. II.), ſaranno pure eguali tra loro le areette *CMV*, *CPV* percorſe a ciaſcun iſtante dal mobile *M*, e le *Cmv* e *pCv* percorſe dall' altro mobile *m*. Adunque preſo qualunque tempo finito, ſaranno le aree traſcorſe da ciaſcuno dei due corpi proporzionali ai tempi, in cui ſi traſcorrono.

COROLLARIO II.

378. Eſſendoſi preſe le rette *CM* e *Cm* in ragione inverſa delle maſſe *M* ed *m*, e ſtando *CM* : *Cm* :: *CV* : *Cv* e *CP* : *Cp* :: *CV* : *cv* (per la ſomiglianza dei triangoli *CMV* e *Cmv*, *CPV* e *cpv* ſuperiormente dimoſtrata), s'avrà ancora *CP* : *Cp* :: *m* : *M*, oſſia ſaranno i ſucceſſivi raggi vettori delle due Curve proporzionali reciprocamente alle maſſe. Il comun centro adunque di loro gravità rimarrà immobile in tutto il tempo della rivoluzione, e ſi potranno quindi conſiderare i due dati corpi, come attirati di continuo dal punto *C* colla ſteſſa forza, con cui ſi attraggono vicendevolmente.

COROLLARIO III.

379. Se le forze di attrazione dei due corpi saranno in ragione reciproca duplicata delle loro distanze, seguiranno ancora la duplicata reciproca delle distanze dal comun centro di gravità. Poichè posta tal legge d'attrazione, se si dividerà la retta *Mm* in *C* in ragione reciproca duplicata delle loro masse, si proverà nello stesso modo di sopra (*N.* 375.) che saranno simili tra loro i triangoli *MCV* ed *mCv*, *PCV* e *pCv*, e varrà quindi la seguente analogia $CM : Cm :: CP : Cp$, componendo la quale, si avrà $CM + Cm : Cm :: CP + Cp : Cp$, ossia $Mm : Cm :: Pp : Cp$, ed $\overline{Mm}^2 : \overline{Pp}^2 :: \overline{Cm}^2 : \overline{Cp}^2$. Nello stesso modo si dedurrà ancora la verità di quest' altra analogia $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$. Poichè componendo la superior proporzione $Cp : CP :: Cm : CM$, si avrà $Pp : Mm :: CP : CM$, e $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$. Adunque se le forze centripete dei corpi *M* ed *m* saranno come i quadrati delle loro distanze *Pp* ed *Mm* inversamente presi, seguiranno ancora la duplicata reciproca ragione delle distanze *CP* e *CM*, *Cp*, e *Cm* dal comune centro di loro gravità.

TEOREMA III.

380. Poste le forze centripete di due corpi *M* ed *m* reciprocamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze, le Curve *MS* ed *ms*, che descriveranno intorno al comun centro di loro gravità, saranno due Sezioni Coniche (*Fig.* 136.).

DIMOSTRAZIONE. Attraendosi i due corpi *M* ed *m* coll' accennata legge, la forza, con cui sarà attirato l'un corpo

nel punto M alla forza, con cui sarà attirato in un altro punto P, sarà :: $\frac{1}{\overline{Mm}^2} : \frac{1}{\overline{Pp}^2}$. Ma $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2$ sta come $\overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$ (*N.* 379.). Adunque la forza di attrazione, che risentirà il dato corpo nel punto M alla forza che proverà nel punto P, sarà :: $\overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$. Similmente la forza centripeta, da cui sarà animato l'altro corpo nel punto m alla stessa forza, che lo animerà nel punto p, sarà :: $\frac{1}{\overline{Mm}^2} : \frac{1}{\overline{Pp}^2}$ :: $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2$; ma sta ancora $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{Cp}^2 : \overline{Cm}^2$. Adunque la forza centripeta in m alla forza centripeta in p sarà :: $\overline{Cp}^2 : \overline{Cm}^2$. Se adunque verranno spinti i due corpi con una data forza di projezione, e saranno le forze centripete in ragione inversa duplicata delle loro distanze, descriveranno essi (*N.* 260.) intorno a C, centro di loro gravità, le due Curve MS ed ms, che apparterranno a qualcuna delle Sezioni Coniche.

COROLLARIO I.

381. Supponendosi che il comun centro C di loro gravità insieme collo spazio, in cui si ravvolgono i corpi, si muova uniformemente ed in diretto, tutt' i muovimenti si compiranno ancora come prima (*N.* 291.), e in questo spazio pure descriveranno i due dati corpi le stesse Curve di prima.

COROLLARIO II.

382. Date quindi le forze centripete dei due corpi inversamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze colla

compoſizione della forza di projezione deſcriveranno eſſi mobili e intorno al centro di gravità C, e intorno a ſe ſteſſi Curve Coniche, che avranno il fuoco nello ſteſſo punto C.

COROLLARIO III.

383. Se la velocità di ciaſcun mobile in qualche punto di queſte Curve ſarà tale che la ragione di eſſa con quella velocità, colla quale nella ſteſſa diſtanza dal fuoco ſi potrebbe deſcrivere un cerchio, poſta la ſteſſa forza centripeta, che ottiene ciaſcuno nel dato punto, ſarà minore di $\sqrt{2} : 1$; le due Curve deſcritte ſaranno due Eliſſi (*N.*219.), e noto avendoſi il raggio vettore corriſpondente allo ſteſſo punto, e l'angolo delle direzioni delle due forze, ſi potrà determinare la poſizione, e la miſura degli aſſi, e la diſtanza dai fuochi (*N.* 255; 258.), e potraſſi geometricamente deſcrivere la Eliſſe da ciaſcun corpo ſeguita.

LEMMA.

384. Dato l'angolo dell' anomalia vera MFA, per cui un corpo che s'avvolge in una Eliſſe, ſi trova ſcoſtato dall' apſide ſomma A, trovare il valore generale del raggio vettore elittico FM (*Fig.* 143.).

RISOLUZIONE. Si abbaſſi da M l'ordinata MP normale al maggior aſſe AB, e ſia CD il minor aſſe, ſarà $CA^2 = DF^2$, e $CA^2 : CD^2 :: CA^2 : DF^2 - CF^2$. Per eſſere in oltre $CA^2 = CP^2 + BPA$, e quindi $CA^2 - CP^2 = BPA$, avraſſi ancora $CA^2 : DF^2 - CF^2 :: CA^2 - CP^2 : MP^2$. Ma CP è $= FP - CF$. Dunque ſi potrà ſtabilire l'analogia $CA^2 : CD^2 :: CA^2 - (FP \mp CF)^2 : MP^2$ (preſo il ſegno —

se il punto P viene a cadere tra F ed A, e l'inferiore se cade lo stesso punto tra F e B) donde si ha $MP^2 = \frac{CD^2 \times \overline{CA^2 - (FP \mp CF)^2}}{CA^2}$, e sostituito in luogo di CD^2 il suo valore $CA^2 - CF^2$, sarà $MP^2 = \overline{CA^2 - CF^2} \times \frac{\overline{CA^2 - (FP \mp CF)^2}}{CA^2}$

$= \frac{CA^2 . CA^2 - CF^2 . CA^2 - (FP^2 \pm 2FP . CF + CF^2) . \overline{CA^2 - CF^2}}{CA^2}$

$= \frac{CA^4 - CF^2 . CA^2 - FP^2 . CA^2 \mp 2FP . CF . CA^2 - CF^2 . CA^2 + CF^4}{CA^2}$

$FP^2 \pm 2FP . CF . CF^2 + CF^4 = CA^4 - FP^2 CA^2 + CF^2 . FP^2 - 2CF^4 .$

$\frac{CA^2 \pm 2FP . CF . CA^2 \mp 2FP . CF . CF^2 + CF^4}{CA^2}$, ed aggiuntovi FP^2 in ciascun membro dell' equazione per surrogarvi il valore FM^2, ridotti i termini, sarà $FM = \sqrt{\frac{CA^4 + CF^2 . FP^2}{-2CF^2 . CA^2 \pm 2FP . CF . CA^2 \mp 2FP . CF . CF^2 + CF^4}{CA^2}}$, ossia $FM = CA \frac{\pm CF . FP - FC^2}{CA}$. Avendosi $\pm FP = \text{cos. } MFP \times FM$, sarà ancora $FM \frac{\mp CF . FM . \text{cos. } MFP}{CA} = \frac{CA^2 - FC^2}{CA} = \frac{CD^2}{CA}$, e quindi finalmente $FM = \frac{CD^2}{CA \mp CF . \text{cos. } MFP}$.

TEOREMA IV.

385. Data la Curva descritta da un corpo con una data forza in un piano immobile, l'intiera forza, con cui si descriverebbe la stessa orbita ravvolgentesi intorno al primiero

centro delle forze, ſarà in ragione inverſa triplicata del raggio vettore di eſſa (*Fig.* 137.).

DIMOSTRAZIONE. Sia *AP* lo ſpazio, che ſi percorrerebbe colla data forza da un corpo poſto in *A* nella Curva immobile *ASB*, e movendoſi nello ſteſſo tempo ancora il piano della Curva, pongaſi che il raggio vettore *FP* paſſi per tal moto continuato nel piano al luogo *Fp*, e che mentre deſcriverebbe nell' orbita immobile il picciol arco $PM = pm$, giunga il raggio vettore per il moto del piano fino in *t*. Egli è manifeſto, che la differenza delle forze nelle due Curve ſarà eguale alla forza, con cui ſi deſcrive l'arco circolare *mt*. Si continui col raggio $Ft = Fm = FM$ l'arco circolare *mt* fino in *N*, ſarà la velocità del corpo nell' orbita immobile alla velocità, che otterrà nella mobile :: *MN* oſſia *mn* : *mt* (*N.* 2.). Venendo poi data la forza di projezione del mobile nell' una e nell' altra Curva, ſaranno le aree deſcritte nello ſteſſo tempo eguali, e ſarà quindi coſtante ſucceſſivamente la loro differenza, oſſia l'area *Fmt*; ma queſt' area è proporzionale al prodotto dell' arco *mt* nel raggio vettore *Fm*. Adunque l'arco *mt* dovrà eſſere di continuo in ragione reciproca di *Fm*, e denominato queſto raggio vettore *r*, ſarà la velocità eſpreſſa dall' arco, cioè $V = \frac{1}{r}$. La forza poi centripeta *G* nel cerchio è in ragione diretta del quadrato della velocità *V*, e reciproca del raggio *r* (*N.* 187.), oſſia ſi ha $G = \frac{V^2}{r}$. Adunque ſoſtituito il valore analogo di *V*, ſarà $G = \frac{1}{r^3}$, cioè la differenza delle forze centripete nell' orbita mobile ed immobile, oſſia la forza totale

totale compoſta, con cui ſi deſcriverà l'arco *mt* (eſſendo la velocità, oſſia la forza tangenziale nel cerchio coſtante (*N.* 185.) ſarà in reciproca triplicata ragione del raggio vettore.

COROLLARIO.

385. Sia l'orbita *ASB* una Eliſſe, la quale abbia il fuoco in *F*, e l'apſide ſomma in *A*, e ſia ad eſſa ſimile ed eguale l'altra Eliſſe *asb*, coſicchè ſia $FA = Fa$, ed il ſucceſſivo raggio vettore $FP = Fp$. Sia la coſtante ragione dell'angolo *AFP* all'angolo *AFp* quella di $b : c$. Denominando il raggio vettore r, ed il parametro di eſſe Eliſſi riferite agli aſſi $= 2p$, ſarà la forza, con cui il corpo potrà ravvolgerſi nell'Eliſſe *asb* mobile $= \frac{b^2}{r^3} + \frac{pc^2 - pb^2}{r^3}$. Imperciocchè pongaſi la forza centripeta, con cui ſi ravvolge il corpo nell'Eliſſe immobile intorno al fuoco $F = \frac{b^2}{r^3}$ [equivalendo b^2 all'area coſtante eſpreſſa altrove per 1 (*N.* 211.)], e la forza ſteſſa nell'apſide ſomma $= \frac{b^2}{\overline{AF}^3}$. Siccome la forza compoſta, con cui lo ſteſſo corpo potrebbe ravvolgerſi in un cerchio alla diſtanza *AF* colla ſteſſa velocità, che ottiene il corpo nel punto *A* dell'Eliſſe, alla forza pure compoſta, che ottiene nel punto *A*, ravvolgendoſi nell'Eliſſe ſta $:: \frac{2p}{4} : \frac{AF}{2}$ (*N.* 217; 197.) $:: p : AF$, ſarà la forza, con cui il mobile ſituato nel punto *A* potrà ravvolgerſi nel cerchio deſcritto col raggio $AF = \frac{pb^2}{\overline{AF}^3}$, e la forza, che ſtia $: \frac{pb^2}{\overline{AF}^3} :: c^2 - b^2 : b^2$ fatti i prodotti dei medj ed eſtre-

mi, e ridotti i termini, ſarà $= \frac{pc^3 - pb^3}{(AF)^3}$. Ma tal forza ſi è la differenza delle forze, con cui il mobile è ſpinto nel punto *A* dell' Eliſſe immobile *ASB*, e nella mobile *asb*, e lo ſteſſo vale generalmente per tutt' i punti di eſſe Curve. Adunque ſi avrà per eſpreſſione della differenza di tali forze in generale la formola. $\frac{pc^3 - pb^3}{r^3}$. Quindi ſe alla forza, con cui il corpo ſi può ravvolgere nell' Eliſſe immobile, ſi aggiugnerà l'eccesſo o la differenza delle due forze $\frac{pc^3 - pb^3}{r^3}$, ſi comporrà l'intiera forza, con cui il dato corpo potrà ravvolgerſi nello ſteſſo tempo nell' Eliſſe mobile *asb*, e verrà eſpreſſa per $\frac{b^3 r + pc^3 - pb^3}{r^3}$.

TEOREMA V.

386. Dati tre corpi *G*, *P*, *H*, i quali ſi attraggano in ragione reciproca dei quadrati delle diſtanze dai loro centri, potranno eſſi corpi ravvolgerſi in Eliſſi, e deſcrivere aree proſſimamente proporzionali ai tempi (*Fig.* 138.).

DIMOSTRAZIONE. Siano i due corpi *P* ed *H* di una tenue grandezza, ed il terzo *G* di una mole sì grande, che il comun centro di gravità di tutti e tre i dati corpi, non ſia ſenſibilmente diſtante dal centro di gravità del maggiore *G* (*N.*23.). Siccome il centro di gravità di più corpi, o riman fermo, o ſi muove uniformemente ed in diretto (*N.* 381.) il corpo *G* o rimarrà fermo, o muoveraſſi in diretto ed uniformemente, e i due minori corpi *P* ed *H*, ſeguendo l'attrazione la legge inverſa dei quadrati delle diſtanze dal centro del maſſimo, animati da una determinata forza di proje-

zione, ſi ravvolgeranno intorno ad eſſo in due Eliſſi (*N.*219.), e deſcriveranno aree proporzionali ai tempi (*N.* 228.), nè vi avrà errore ſe non in quanto queſto loro moto ſarà ſturbato, o dalla diſtanza del maggior corpo *G* dal comun centro di gravità, o per la vicendevole attrazione dei corpi *P* ed *H* tra loro. Sminuendoſi quindi le loro maſſe, finchè l'errore della diſtanza del punto *G* dal comun centro di gravità, e le vicendevoli attrazioni dei due corpi *P* ed *H* diventino minori di ogni quantità aſſegnabile, è manifeſto che le orbite, in cui ſi ravvolgeranno i due corpi, ſaranno proſſimamente due Eliſſi, e le aree in eſſe percorſe proporzionali ai tempi.

COROLLARIO I.

387. Similmente ſe intorno al corpo *M* vi avranno altri corpi π, *n* ed *m* di una menoma grandezza per rapporto allo ſteſſo *M*, per modo che abbiano il comun centro di loro gravità proſſimo allo ſteſſo centro di *M*, operando l'attrazione coll' aſſegnata legge, e preſcindendoſi dalla attrazione vicendevole delle maſſe π, *n* ed *m* tra loro, e col ſiſtema dei corpi *G*, *P*, *H*, ſuppoſta l'una e l'altra infinitesima per rapporto a quella, che riſentono da *M*, e negligentata la menoma aberrazione dal vero centro di gravità, potranno eſſi pure deſcrivere Curve Elittiche intorno al corpo *M* coll' aſſegnata velocità projettile (*N.* 219.), e percorrere aree proporzionali ai tempi (*N.* 228.). Lo ſteſſo diſcorſo varrà pure propoſto un maggior numero di corpi d'attorno allo ſteſſo *M*. Potranno adunque più corpi attraentiſi in ragione reciproca dei quadrati delle loro diſtanze ravvolgerſi in Curve Elittiche intorno al maſſimo, e de-

ſcrivere aree proporzionali ai tempi, ſenza tema d' errore che poſſa eſſere aſſegnabile.

COROLLARIO II.

388. Se ſi ſupporrà quindi che tanto il ſiſtema de' tre primi corpi G, H, P, quanto quello di M, π, n ed m, e così qualunque altro conſimile, ſi muova uniformemente ed in diretto, oſſia che i due centri di gravità G ed M ſi muovano uniformemente per le rette GR ed Mr, e che per la forza di un altro corpo S molto maggiore di G e di M, e ſituato ad una grande diſtanza da eſſi, fieno attirati i mentovati corpi per le rette SG ed SM colla aſſegnata legge di gravità, ſaranno eſſi ritratti dalle rette GR ed Mr, e ſforzati a piegare nelle curve GV ed Mv. Siccome poi le eguali forze acceleratrici, colle quali i dati corpi ſono ſpinti uniformemente con direzioni parallele, non cangiano la diſpoſizione dei corpi, ma ſolo ottengono che ciaſcun ſiſtema particolare ſi traſporti, ſenza che ſi alterino i relativi moti dei corpi medeſimi; così è chiaro che per l'attrazione, che riſentono dal maſſimo S, non ne naſcerà alcuna mutazione nei moti dei corpi prima attraentiſi, ſe non ſe, o per la diſuguaglianza dell' attrazione, o per l'inclinazione delle linee, ch' eſprimono la direzione della forza attraente. Se adunque tutte le forze acceleratrici, prodotte dal corpo S, ſeguiranno la ragione reciproca dei quadrati delle diſtanze da eſſo, e ſi accreſcerà per tal modo la diſtanza dello ſteſſo corpo S, che le differenze delle diſtanze particolari da S dei corpi, che formavano il loro particolare ſiſtema, ſiano infiniteſime per rapporto alla diſtanza di tutto il ſiſtema,

e ſe le inclinazioni vicendevoli degli ſteſſi corpi ſi aſſumeranno minori di ogni quantità aſſegnabile, i mentovati corpi G, P, H ed M, π, m, n continueranno i loro movimenti di prima, e ſi ravvolgeranno nelle primiere Eliſſi. Atteſe ancora le picciole diſtanze particolari tra i corpi G, H, P, e ſimilmente tra gli altri M, π, m, n, ſe ſi paragonino colla diſtanza immenſa dal corpo S, tanto il ſiſtema dei corpi G, P, H quanto quello degli altri M, π, m, n, potraſſi conſiderare unito e attirato come un ſol corpo, che ſi muoverà quindi allo ſteſſo modo di un corpo unico e ſolo, e percorrerà intorno al maſſimo S colla aſſegnata forza impreſſa una Eliſſe, deſcrivendo aree proporzionali ai tempi, le quali non avranno altre diſuguaglianze, che quelle che ſi poſſono produrre dalle diverſe diſtanze dei corpi, che formano i primi due ſiſtemi particolari, le quali ſaranno minime, e ſi potranno ancora ſminuire a piacere. Collo ſteſſo diſcorſo ſi proverà ancora, che potranno altri corpi T ed L ec., poſte le accennate condizioni, ravvolgerſi ſimilmente in Curve Elittiche d'attorno al maſſimo S ſituato nell' ombelico di eſſe.

COROLLARIO III.

389. Quanto più s'accoſterà il corpo maſſimo S ai ſiſtemi dei corpi minori, tanto più ſi turberanno i moti di queſti, e per la maggiore inclinazione delle linee condotte da S a ciaſcuno di eſſi, e per la maggiore ineguaglianza delle forze acceleratrici dello ſteſſo corpo S in eſſi generate, e decreſcenti in ragione dei quadrati delle riſpettive diſtanze da eſſo reſe diſuguali ſenſibilmente, diminuita la diſtanza dello ſteſſo corpo S, rapporto alla immenſità, della quale ſi erano conſiderate per eguali.

COROLLARIO IV.

390. Viceverſa, ſe più corpi di un ſiſtema ſi ravvolgeranno in Eliſſi ſenza ſenſibili diſuguaglianze, eſſi non riſentiranno che lievemente le forze provenienti da altri corpi eſiſtenti fuori del loro ſiſtema, o ſaranno attirati preſſo che egualmente, e con direzioni proſſimamente parallele.

PROBLEMA I.

391. Dati tre corpi S, T, L attraentiſi tra loro con forze decreſcenti in ragione duplicata delle loro diſtanze (*Fig.* 140.), e ſupponendoſi che il corpo L ſi ravvolga intorno all' intimo T, ed entrambi poi intorno al maſſimo S, trovare le forze perturbatrici dall' orbita del corpo L provenienti dal maſſimo S, eſſendo date le diſtanze dei corpi T ed L, e di ambedue per rapporto ad S, e conſiderandoſi l'orbita di L circolare, e i movimenti dei dati corpi fatti in un medeſimo piano.

Risoluzione. Siano i corpi S, T, L diſpoſti come ſi vede nella figura, e s'intenda condotta ad ST la normale CT, che prodotta in D dinoterà la linea delle quadrature, ſiccome la AB preſa ſulla direzione ST, dimoſtrerà la linea delle ſiſigie. Si congiungano i centri dei corpi S, L, T colle rette SL ed LT, e da L ſi abbaſſi ſulla linea delle ſiſigie la normale LV, e ſulla linea delle quadrature la perpendicolare LH. Sia in oltre la maſſa del corpo $T = M$ e di $S = 1$, ſarà la forza centripeta del corpo L verſo $T = \frac{M}{TL^2}$, e verſo $S = \frac{1}{SL^2}$. Diriggendoſi quindi

la forza $\frac{1}{\overline{SL}^2}$ da S verſo L, condotta da S la SN normale alla direzione del raggio vettore TL, ſi potrà riſolvere nelle due $\frac{SN}{\overline{SL}^2}$ ed $\frac{LN}{\overline{SL}^2}$, la prima delle quali dovrà accelerare o ritardare il moto perpendicolare al raggio vettore del corpo L, ſecondocchè ſarà coſpirante o contraria, e la ſeconda dovrà ſminuire od accreſcere la gravità dello ſteſſo corpo L verſo T. Eſſendo poi ſimili i due triangoli LVT ed SNT, ſi avrà l'analogia $TL : TV :: ST : TN$, e ſarà $TN = \frac{TV.ST}{TL}$, e $TN - TL$, oſſia $LN = \frac{TV.ST}{TL} - TL$, e quindi $\frac{LN}{\overline{SL}^2} = \frac{TV.ST}{TL.\overline{SL}^2} - \frac{TL}{\overline{SL}^2}$. Il corpo T ſarà attirato in oltre verſo S con una forza $= \frac{1}{\overline{ST}^2}$, e riſolvendo queſta forza ſecondo le due direzioni TN ed SN, la prima di eſſe, cioè $\frac{TN}{\overline{ST}^2}$ s' impiegherà nell' attirare il corpo L verſo T. Avendoſi poi dai mentovati triangoli ſimili $LT : TV :: ST : TN$, oſſia $TN = \frac{TV.ST}{TL}$, la ſuddetta forza $\frac{TN}{\overline{ST}^2}$ ſarà eſpreſſa ancora per $\frac{TV}{TL.\overline{ST}^2}$. La total forza adunque, con cui il corpo L ſarà diſtratto dalla ſua orbita per l' azione del maſſimo S, ſarà $= \frac{TV.ST - \overline{TL}^2}{TL.\overline{SL}^2} - \frac{TV}{TL.\overline{ST}^2}$. Similmente eſſendo $TL : TV :: ST : SN$, ſi avrà l'eſpreſſione dell' altra forza normale alla direzione del raggio vettore, cioè $\frac{SN}{\overline{SL}^2} = \frac{LV.ST}{TL.\overline{SL}^2}$, e dovendoſi quì pure ſot-

trarre la forza $\frac{SN}{\overline{ST}^2}$, con cui il corpo L è ritirato in parte oppoſta dal centrale T, ſarà la total forza che agirà perpendicolarmente al raggio vettore $= \frac{LV.ST}{TL.\overline{SL}^3} - \frac{SN}{\overline{ST}^2}$, oſſia ſoſtituito il valore di $SN = \frac{ST.LV}{TL}$, ſarà la predetta forza $= \frac{LV.ST}{TL.\overline{SL}^3} - \frac{LV}{TL.\overline{ST}^2}$. Conſiderandoſi poi l'angolo STL acuto, ſarà $\overline{SL}^2 = \overline{TL}^2 + \overline{ST}^2 - ST.TV$, e fatta $ST = a$, $TL = r$, la generale eſpreſſione della forza perpendicolare al raggio vettore ſarà $\frac{LV.a}{r(a^2 + r^2 - 2aTV)^{\frac{1}{2}}} - \frac{LV}{a^2 r}$, e l'eſpreſſione dell'altra forza atta ad accreſcere, o ſcemare la gravità di L verſo T, ſarà $\frac{aTV - r^2}{r(a^2 + r^2 - 2aTV)^{\frac{1}{2}}} - \frac{TV}{r.a^2}$. Preſa quindi la formola Newtoniana per l'evoluzione delle potenze, cioè $a^m + ma^{m-1}b + m.\frac{m-1}{2}.a^{m-2}.b^2$ ec., e fatto $m = -\frac{1}{2}$ ed $r^2 - 2aTV = b$, omeſſe alcune frazioni di ordine inferiore a ragione della maſſima diſtanza di S da T neceſſaria nella fatta Ipoteſi, ſi troverà $(a^2 + r^2 - 2aTV)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^1} - \frac{3r^2}{2a^4} + \frac{3TV}{a^4} + \frac{15\overline{TV}^2}{2a^6}$, e l'eſpreſſione della forza perpendicolare al raggio vettore, ſarà $\frac{LV}{r}.\left(\frac{1}{a^2} - \frac{3r^2}{2a^4} + \frac{3TV}{a^4} + \frac{15\overline{TV}^2}{2a^6}.\right) - \frac{LV}{a^2 r} = \frac{LV}{r}.\left(\frac{3.TV}{a^4} - \frac{3r^2}{2a^4} + \frac{15.\overline{TV}^2}{2a^6}.\right)$, e preſo $LV = r.\text{ſen.}STL$, e $TV = r.\text{coſ.}STL$, e $\overline{TV}^2 = r^2\,\text{coſ.}^2 STL$, s'avrà la formola ſuperiore ridotta alla ſeguente

$\frac{3r}{a^4}$. sen. STL. cos. $STL - \frac{3r^2}{2a^4}$. sen. $STL + \frac{15r^3}{2a^4}$. cos.^{2} STL. sen. STL, e denominato l'angolo $STL = z$, e surrogato il valore di sen. z. cos. $z = \frac{1}{2}$. sen. $2z$, di cos.$^2 z = 1 -$ sen.$^2 z$, e di sen.$^3 z = \frac{1}{4}$. sen. $z - \frac{1}{4}$. sen. $3z$, l'espressione della forza perturbatrice normale al raggio vettore, sarà la seguente $\frac{3r}{2a^4}$. sen. $2z + \frac{3r^2}{8a^4}$. sen. $z + \frac{15.r^3}{8a^4}$. sen. $3z$.

Collo stesso metodo si troverà similmente l'altra forza operante, secondo la direzione del raggio vettore, espressa per $\left(\frac{aTV - r^2}{r}\right).\left(\frac{1}{a^3} - \frac{3r^2}{2a^4} + \frac{3TV}{a^4} + \frac{15.\overline{TV}^2}{2a^5}.\right) - \frac{TV}{a^3 r}$ $= -\frac{r}{a^3} + \frac{3\overline{TV}^2}{a^4 r} - \frac{9.rTV}{2a^4} + \frac{15.\overline{TV}^3}{2a^5.r}$, e sostituendo quivi pure i valori di $TV = r$. cos. z, di $\frac{\overline{TV}^2}{r^2} =$ cos.$^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ cos. $2z$, e di $\frac{\overline{TV}^3}{r^3} = \frac{1}{4}$. cos. $z + \frac{1}{4}$ cos. $3z$, la general formola per la forza di S nella direzione del raggio vettore farà $\frac{r}{2a^3} + \frac{3r}{2a^4}$. cos. $2z + \frac{9.r^2}{8a^4}$. cos. $z + \frac{15.r^3}{8a^4}$. cos. $3z$.

COROLLARIO I.

392. Se l'angolo STL sarà retto, il che accaderà trovandosi il corpo L nelle quadrature D e C, posto cos. $2z = -1$, sarà cos. $z = 0$, e cos. $3z = 0$, e si troverà la forza perturbatrice di S operante secondo la direzione del raggio vettore $= -\frac{r}{a^3}$, ed essendo negativa l'azione del corpo S, per distrarre L dalla sua orbita, accrescerassi la gravità del

corpo L verſo T della quantità $\frac{r}{a^2}$. Nelle ſiſigie poi, avendoſi $\text{cof.}\, 2z = 1$, ſarà la forza diſtraente di $S = \frac{2r}{a^2}$, oſſia ſcemeraſſi di tale quantità la gravità di L verſo T, e ſarà la diminuzione fatta nelle ſiſigie doppia dell' incremento fatto nelle quadrature. Similmente l'altra forza perpendicolare al raggio, eſpreſſa maſſimamente dal primo termine della ſerie, ſi troverà maſſima negli ottanti delle quadrature, in cui ſi ha il valor maſſimo di $\text{ſen.}\, 2z$, e in vigore di eſſa forza ſi renderà più celere il moto del corpo L nel paſſaggio dalla prima quadratura D alla proſſima ſiſigia A, nel qual caſo ſaranno poſitivi i ſeni, dai quali viene eſpreſſa la ſuddetta forza, e ſi ritarderà con eguale graduazione nel paſſare dalla ſiſigia A all' altra quadratura C, nel qual caſo ſi avranno negativi i ſeni dell' angolo ATL'. Per la ſteſſa ragione ſarà accelerato il moto del corpo L nel paſſaggio da C a B, e verrà ritardato nel paſſare da B in D, poichè per tutto il quadrante BC per gli angoli ottuſi ATL'', ſi dovranno prendere i ſeni degli angoli acuti ATL nel quadrante AD, i quali ſono poſitivi, e per il quadrante BD i ſeni dell' ottuſo angolo ATL''' ſi dovranno prendere dai conſeguenti acuti nel quadrante AD, in cui ſi hanno negativi. Lo ſteſſo è facile a vederſi eſaminando la direzione della forza perpendicolare SN, SN', la quale coſpira col moto di L nel quadrante AD (ſuppoſto che il moto di L ſi faccia da D verſo A), e ſi oppone nel quadrante AC, rientrando ſeconda nel quadrante BC, e contraria nell' altro DB.

COROLLARIO II.

393. Ricercandoſi poi l'intiera forza perturbatrice del corpo S ſull'orbita di L nell'Ipoteſi che agiſca con direzione parallela a TS, preſa cioè preſſocchè infinita la diſtanza dei corpi S e T, ſi troverà tal forza proporzionale al triplo coſeno dell'angolo STL, oſſia al triplo ſeno dell'angolo LTD formato dal raggio vettore TL e dalla linea delle quadrature CD. Poichè eſſendo preſſocchè infinita la TS, ſarà TL una linea infiniteſima per rapporto a TS, e nella formola generale della forza di S, operante nella direzione del raggio vettore, traſcurato il primo termine per ſe evaneſcente, e conſiderato il ſecondo, in cui ſi contiene principalmente il valore della formola, l'eſpreſſione della forza ricercata ſarà $\frac{3r.\text{cof.}2z}{2.a^3}$. Eſſendo poi $\text{cof.}\,z = \text{ſen.}\,LTD$, denominato l'angolo $LTD = y$, la ſteſſa forza ſarà ancora eſpreſſa per $\frac{3r.\text{ſen.}2y}{2.a^3}$.

COROLLARIO III.

394. Dai primi termini eſprimenti la forza perturbatrice di S ſopra l'orbita di L nella direzione del raggio vettore TL, ſi vede eſſere ſoltanto coſtante e invariabile il primo, ſuppoſto che il raggio ST, oſſia a, eſprima la diſtanza media dei corpi T ed S. Si potrà adunque aſſumere la media forza perturbatrice di S nell'aſſegnata direzione eſpreſſa coſtantemente per $\frac{r}{2a^3}$. Siccome poi, nella fatta Ipoteſi, i quadrati dei tempi periodici ſono inverſamente pro-

porzionali ai cubi delle distanze mediocri (*N.* 195.), denominata la distanza media di L da $T = 1$, e la ragione dei tempi periodici di T intorno ad S, e di L intorno a T quella di $1 : n$, sarà $1 : \frac{1}{n^3} :: 1 : n^2$, ossia $n^2 = \frac{1}{n^3}$, e la media forza perturbatrice sarà pure espressa per $\frac{rn^2}{2}$. L'espressione quindi generale della media e costante forza centripeta nell' intiera rivoluzione del corpo L intorno a T, sarà la seguente $\frac{1}{r^2} - \frac{rn^2}{2}$, e per qualunque posizione del corpo L, per rapporto ad S, sarà la stessa forza $= \frac{1}{r^2} - \frac{rn^2}{2} - \frac{1}{2} n^2 r . \text{cos.} 2z$ ec.

PROBLEMA II.

395. Ritenute le stesse Ipotesi del Problema precedente, assegnare generalmente le variazioni della velocità del corpo L (*Fig.* 142.)

RISOLUZIONE. Sia LTl l'infinitesimo angolo, per cui il corpo L si scosta in un istante di tempo dalla linea TD delle quadrature, sarà tale angolo $= \frac{Ll}{TL} = \frac{lo}{LV}$, e denominato, come sopra, $TL = r$, l'angolo $STL = z$, sarà $LV = r . \text{sen.} z$, e $TV = r . \text{cos.} z$, ed $lo = V\upsilon = r . d . (\text{cos.} z)$, l'angolo LTl si troverà $= \frac{d(\text{cos.} z)}{\sqrt{1 - \text{cos.}^2 z}}$. Che se nel tempo, in cui il corpo L descrive il picciol arco Ll, il corpo S descriverà l'arco SS', l'arco percorso dal raggio vettore TL, computato dalla linea DT delle quadrature, diverrà minore in ragione della differenza dei moti angolari dei corpi S ed L. Seguendo poi i tempi delle rivoluzioni, la ragione

inverſa degli ſpazj od archi deſcritti in un dato tempo, ſe la ragione del moto relativo di L per rapporto ad S, al moto aſſoluto, cioè il tempo della rivoluzione periodica al tempo della rivoluzione ſinodica, in cui L ritorna allo ſteſſo aſpetto con S, ſi aſſumerà quello di $1 : T$, perchè ſi ſcoſti il corpo L della linea delle quadrature per un angolo $\frac{d(\text{cof.}z)}{\sqrt{1-\text{cof.}^2 z}}$, dovrà deſcrivere un arco $= \frac{T.d(\text{cof.}z)}{\sqrt{1-\text{cof.}^2 z}}$. Preſo adunque il primo termine eſpreſſivo della forza perpendicolare al raggio vettore (*N.* 391.) $\frac{3LV.TV}{r.a^2} = \frac{3r.\text{ſen.}z.\text{cof.}z}{a^3}$, e chiamata V la velocità del corpo L in direzione normale al raggio vettore, e ſoſtituito come ſopra n^2 al luogo di $\frac{1}{a^3}$ ſarà $VdV = 3n^2 r.\text{cof.}z.r\sqrt{1-\text{cof.}^2 z} \times \frac{T.d(\text{cof.}z)}{\sqrt{(1-\text{cof.}^2 z)}}$, e preſe le Somme, omeſſo il ſotto-moltiplice 2 da ciaſcuna parte, riſulterà $V^2 = 3n^2 r^2 T.\text{cof.}^2 z + C$. Che ſe denomineraſſi la velocità della prima projezione $= A$, e generalmente in qualſiſia luogo dell' orbita $= \frac{A}{r}$, ſarà $V^2 = \frac{A^2}{r^2} + 3n^2 r.T.\text{cof.}^2 z$, e preſi in ſeguito altri termini della ſteſſa ſerie, s'avrà $V^2 = \frac{A^2}{r^2} + 3n^2.Tr^2.\text{cof.}^2 z - \frac{3n^2 rT\,\text{cof.}z}{a} + \frac{5n^2 rT\,\text{cof.}^3 z}{a}$, e fatte le ſoſtituzioni, come ſopra dei valori di $\text{cof.}^2 z$, e di $\text{cof.}^3 z$, riducendo i termini, riſulterà finalmente $V^2 = \frac{A^2}{r^2} + \frac{1}{2}n^2 Tr^2(1 + \text{cof.}2z) + \frac{3n^2 rT.\text{cof.}z}{4a} + \frac{5n^2 rT.\text{cof.}3z}{4a}$.

COROLLARIO.

396. Confondendoſi SN con ST nelle quadrature, ſva-

nirà la forza perpendicolare al raggio, e si dovrà prendere cos. $2z = -1$. Nelle sisigie quindi sarà cos. $2z = 1$. La velocità adunque del corpo L nelle quadrature alla velocità di esso nelle sisigie, sarà in ragione sudduplicata di $\frac{A^2}{r^2} : \frac{A^2}{r^2} + 3n^2T$, ossia di $1 : 1 + 3n^2T$, e prossimamente nella semplice ragione di $1 : 1 + \frac{1}{2}n^2T$.

PROBLEMA III.

397. Assegnare generalmente le variazioni delle forze provenienti dal corpo S, supposta qualche inclinazione dell' orbita del corpo L verso il piano SFT, e attesa quindi la diversa posizione dei nodi (*Fig.* 139.).

Risoluzione. Sia EI la linea d'intersezione dei due dati piani ed SB la retta indicante le sisigie, e CD le quadrature. Esprimansi le forze dei punti L e T per $\frac{1}{SL^2}$ ed $\frac{1}{ST^2}$ che agiscano secondo le direzioni SL ed ST. Se risolverassi la prima forza agente, giusta la direzione del raggio vettore TL, si troveranno, operando come sopra (*N.* 391.), i primi termini esprimenti tale forza $-\frac{r}{a^3} + \frac{3\overline{TV}^2}{r.a^3}$ ec.

S'intenda, per la fatta Ipotesi, abbassata dal punto A una perpendicolare AA' sul piano $EA'I$, e si assuma la ragione del raggio al seno dell' angolo d'inclinazione dei due piani quella di $1 : f$, sarà $AA' : AG :: f : 1$, ossia $AA' = f.AG = fr$ sen. ATE, e sarà $TA : TA' :: LH$ alla retta, che resterà intercetta tra il punto H, e la normale abbassata da L sul piano $EA'I$, cioè sarà $TA : TA' :: LH, TV$, e quindi

$TV = \frac{TA' . IH}{TA}$, e prendendoſi $TA = 1$, e $TA' = \sqrt{1 - AA'}$ $= \sqrt{(1 - f^2 . \text{ſen.}^2 ATE)}$, introdotti tali valori, avraſſi $TV = LH . \sqrt{(1 - f^2 . \text{ſen.}^2 ATE)}$. Surrogando quindi nella formola generale della ricercata forza, queſto valore di TV dedotto dall' Ipoteſi dell' inclinazione dell' orbita del corpo L col piano SFT, e di qualunque poſizione dei nodi, che ne riſulti, i primi termini eſprimenti la forza perturbatrice proveniente da S ſull' orbita di L, giuſta la direzione del raggio vettore, ſaranno i ſeguenti $-\frac{r}{a^3} + \frac{3\overline{LH}^2}{r . a^3} . (1 - f^2 . \text{ſen.}^2 ATE)$ e ponendo $\text{ſen.} \overline{ATE}^2 = \text{ſen.}^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cof.} 2\varphi$, e $\frac{\overline{LH}^2}{r^2} = \text{cof.}^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{cof.} 2z$, ſoſtituito pure in vece di $\frac{1}{a^3}$ il valore analogo n^2 come ſopra (*N.*394.), ſi avrà cangiata la ſuperior formola della forza perturbatrice nella ſeguente

$$-rn^2 + 3rn^2 . (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} . \text{cof.} 2z) . (1 - \tfrac{1}{2} f^2 + \tfrac{1}{2} . \text{cof.} 2\varphi)$$
$$= \frac{rn^2}{2} (1 - \tfrac{1}{2} . f^2 + \tfrac{1}{2} f^2 . \text{cof.} 2\varphi) + \tfrac{1}{2} rn^2 (1 - \tfrac{1}{2} f^2 . \text{cof.} 2z)$$
$$+ \tfrac{1}{4} arf^2 n^2 . \text{cof.} 2z . \text{cof.} 2\varphi .$$

Collo ſteſſo metodo ſi troveranno pure i primi termini dell' altra forza perpendicolare al raggio vettore, cioè $\frac{3TV . TH}{ra^3}$ $= \frac{1}{2} rn^2 . (1 - \frac{1}{2} f^2) . \text{ſen.} 2z + \frac{1}{4} rf^2 n^2 . \text{ſen.} 2z . \text{cof.} 2\varphi$.

COROLLARIO I.

398. Si troverà ancora la forza, con cui il punto T ſarà attirato perpendicolarmente al piano EAI eſpreſſa per la frazione $\frac{AA'}{a^3} = \frac{f . \text{ſen.} \varphi}{a^3}$, e ſimilmente la forza, colla quale ſarà attirato il punto L nella ſteſſa direzione, ſarà

espressa per $\frac{af.\text{sen.}\,\phi}{\overline{SL}^3}$. Essendo poi $\overline{SL}^2 = a^2 + r^2 - 2a.TV$ nel caso dell' angolo STL acuto, ed $\overline{SL}^2 = a^2 + r^2$ nel caso dell' angolo retto, ponendo in vece di TV il suo valore ritrovato nell' Ipotesi fatta della inclinazione dei piani, cioè r cos.z $\sqrt{(1 - f^2.\text{cos.}^2\varphi)}$ si avrà nel primo caso dell' angolo acuto la differenza delle due assegnate forze espressa per i termini $\frac{af.\text{sen.}\,\phi}{(a^2 + r^2 - 2ar\,\text{cos.}z.\sqrt{(1 - f^2.\text{sen.}^2\varphi)})^{\frac{3}{2}}} - \frac{f.\text{sen.}\,\phi}{a^2}$, e prossimamente, considerato il primo termine $\frac{3.TV}{a^4}$ già ritrovato (*N.*391.), $= 3f.n^3\,\text{sen.}\varphi.r\,\text{cos.}z.\sqrt{(1 - f^2.\text{sen.}^2\varphi)}$. Nel caso poi dell' angolo retto, ossia nelle quadrature, la differenza di esse forze sarà $= \frac{af.\text{sen.}\,\phi}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{f.\text{sen.}\,\phi}{a^2}$.

COROLLARIO II.

399. Preso un arco infinitesimo Ll di un cerchio (*Fig.*141.) e abbassato sul diametro LA il cateto lp, e condotta la corda lA, per la somiglianza dei triangoli ALl ed Llp, si troverà $Lp = \frac{\overline{Ll}^2}{2TL}$. Se adunque LO (*Fig.*139.) sarà uno spazio doppio di quello, che potrebbe percorrersi per le forze perpendicolari al piano EAI nel tempo che il corpo L trascorre l'infinitesimo arco Ll, sarà la forza di gravità del corpo L alla forza normale al piano EAI :: $\frac{\overline{Ll}^2}{2TL} : \frac{LO}{2}$ (*N.*141.), e denominando, come sopra, la gravità del corpo L per $\frac{M}{\overline{TL}^2}$ sarà $\frac{\overline{Ll}^2}{\overline{TL}^2} : LO :: \frac{M}{TL} : \frac{a.f.\text{sen.}\,\phi}{(a^2 + r^2 - 2ar.\text{cos.}z.\sqrt{(1 - f^2.\text{sen.}^2\varphi)})^{\frac{3}{2}}}$

$-\frac{f.\text{sen.}\,\phi}{a^2}$, e $LO = \frac{a.f.r.\overline{LI}^2.\text{sen.}\,\phi}{M.(a^2+r^2-2r\,\text{cos.}\,z.\sqrt{(1-f^2.\text{sen.}^2\,\phi)})^{\frac{1}{2}}}$

$-\frac{f.r.\overline{LI}^2.\text{sen.}\,\phi}{M.a^2}$, il cui proſſimo valore ſarà come ſopra

$= \frac{3.fn^2r}{M}.\overline{LI}^2 r\,\text{cos.}\,z.\text{sen.}\,\varphi.\sqrt{(1-f^2.\text{sen.}^2\,\varphi.)}$.

PROBLEMA IV.

400. Trovare il raggio del cerchio, che abbia la ſteſſa curvità dell' orbita del corpo L in qualunque aſſegnabile punto di eſſa (*Fig.* 141.).

RISOLUZIONE. Sia preſo un ſettore circolare TMA, di cui ſia TA il raggio, PM il ſeno retto, e PA il ſeno verſo. Condotta la corda AM, ſi avrà $\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{AP}^2 + AP.PL = \overline{AP+PL}\times AP = \overline{LT+TP+AP}\times AP = 2LT.AP$, ed $LT = \frac{\overline{AM}^2}{2.AP}$, cioè il raggio del cerchio ſi troverà eguale al quadrato della ſotteſa del dato arco diviſo per il doppio ſeno verſo dello ſteſſo arco, e ſminuendoſi l'arco all' infinito, coſicchè ſi confonda colla ſotteſa (*Aſs.* I. Part. II.) ſe ſi dividerà il quadrato della velocità eſpreſſa dell' archetto infiniteſimo per il doppio ſeno verſo, che dinota la forza centripeta (*N.* 142; 81.) ſi otterrà il raggio del cerchio, che avrà la ſteſſa curvità nel dato luogo coll' orbita di L. Eſſendoſi poi trovato il valore di $V^2 = \frac{A^2}{r^2} + \frac{1}{2}n^2r^2T.(1+\text{cos.}\,2z.) + \frac{3.n^2}{4^2}rT.\text{cos.}\,z + \frac{5.n^2}{4^2}rT.\text{cos.}\,3z$ (*N.* 395.), e per la forza centripeta, conſiderandoſi pure la forza di S, che agiſce nella direzione del raggio vettore, avendoſi (*N.* 394.) la

general espressione $\frac{1}{r^3} - \frac{rn^2}{2} - \frac{3n^2}{2} r.\text{cos.}2z - \frac{9r^2n^2}{8a}.\text{cos.}z - \frac{15.r^2.n^2}{8a}.\text{cos.}3z$, il ricercato raggio vettore per ciascun punto dell' orbita di L, risulterà espresso dai termini seguenti

$$\frac{\frac{A^2}{r^3} + \frac{3n^2}{2} T.r^3(1+\text{cos.}2z) + \frac{3n^2}{4a} r.T\,\text{cos.}z + \frac{5.n^2}{4a} rT.\text{cos.}3z}{\frac{1}{r^3} - \frac{rn^2}{2} - \frac{3n^2}{2} r.\text{cos.}2z - \frac{9r^2}{8a}.n^2.\text{cos.}z - \frac{15.r^2n^2}{8a}.\text{cos.}3z}.$$

COROLLARIO I.

401. Preso per le sisigie $\text{cos.}2z = 1$, e per le quadrature $\text{cos.}2z = -1$, il raggio osculatore dell' orbita di L nelle sisigie al raggio stesso nelle quadrature, sarà $:: \frac{\frac{A^2}{r^3} + 3n^2Tr^2}{\frac{1}{r^3} - 2rn^2} : \frac{\frac{A^2}{r^3}}{\frac{1}{r^3} + rn^2}$ e potendosi confondere r ed A coll' unità, omesse le minori frazioni, si troverà la ragione de' mentovati raggi prossimamente come $1 + 3n^2.(T+1) : 1$.

COROLLARIO II.

402. Il corpo L avendo una maggior velocità trovandosi nelle sisigie col corpo S (*N.* 396.), ed una forza centripeta minore che nelle quadrature (*N.* 394.) devierà meno dal retto cammino nelle sisigie che nelle quadrature, e l' orbita di L sarà più curva nell' aspetto quadrato di S, che nella congiunzione od oppossizione con esso, il che non può accadere, secluso il moto della eccentricità, se il corpo L non si discosti più da T nelle quadrature che nelle sisigie.

PROBLEMA V.

403. Trovare le variazioni delle ſtabilite forze perturbatrici dell' orbita del corpo L, conſiderata l' eccentricità dell' orbita deſcritta dal corpo T intorno ad S (*Fig.* 142.).

RISOLUZIONE. Dinoti a la diſtanza media dei corpi T ed S, e ſia perciò il maggior ſemiaſſe dell' orbita di $T = a$, il quale ſtia all' eccentricità :: 1 : ω, ed abbiaſi la diſtanza angolare TSA del corpo T dall' apſide ſomma, ſarà la vera diſtanza ST del corpo T da $S = \frac{(1-\omega^2).a}{1-\omega.\text{cof.}TSA}$ (*N.* 384.), e conſiderata tenue la eccentricità dell' orbita del corpo T, traſcurate le minori frazioni, ſarà $\frac{1}{ST^2} = \frac{1}{a^2}.(1+3\omega.\text{cof.}TSA)$. Aſſumendoſi quindi la ragione dei tempi periodici delle rivoluzioni del corpo T intorno ad S, e di L intorno a T quella di 1 : n, ed eſprimendo la gravità di L verſo T nelle medie diſtanze, cioè $\frac{M}{TL^2}$ coll' unità, ſe ſi ſoſtituirà al luogo di n^2 la quantità $n^2(1+3\omega.\text{cof. }TSA)$, ed in luogo di $\frac{1}{a^4}$, ſi porrà $\frac{n^2}{a}.(1-4\omega.\text{cof. }TSA)$, denominato pure $\text{cof. }TSA = \text{cof.}\lambda$, i primi termini della forza perturbatrice di S nella direzione del raggio vettore dell' orbita di L, atteſe le formole ſtabilite ſuperiormente (*N.* 397.), ſaranno i ſeguenti

$$\tfrac{1}{2}n^2r\left(1-\tfrac{1}{2}f^2\right).(1-3\omega.\text{cof.}\lambda)+\tfrac{1}{4}n^2r\left(1-\tfrac{1}{2}f^2\right).(1-3\omega.\text{cof.}\lambda).\text{cof.}2z+\tfrac{3}{8}n^2r^2(1-4\omega.\text{cof.}\lambda).\text{cof.}z$$
$$+\frac{15.n^2}{8a}r^2.\text{cof.}3z+\tfrac{1}{4}n^2f^2r.\text{cof.}2\varphi+\tfrac{1}{4}n^2f^2r.\text{cof.}2\varphi.\text{cof.}2z.$$

Similmente si troveranno i primi termini della forza perpendicolare allo stesso raggio

$$\tfrac{1}{2}n^2 r\,(1-\tfrac{1}{4}f^2).(1-3\omega.\text{cos.}\lambda.).\text{sen.}\,2z$$
$$+\frac{3.n^2r^2}{8a}(1-4\omega.\text{cos.}\lambda).\text{sen.}\,z+\frac{15.n^2r^2}{8a}.\text{sen.}\,3z$$
$$+\tfrac{1}{4}n^2f^2r.\text{sen.}\,2z.\text{cos.}\,2\varphi\,.$$

PROBLEMA VI.

404. Determinare generalmente qual movimento debba seguire negli apsidi dell' orbita di L, supposta prossimamente circolare (*Fig.* 137.).

Risoluzione. Si esprima la costante ragione dell' area AFP, descritta nell' orbita immobile $APBS$, all' area AFp, percorsa nella mobile $apbs$, col rapporto di $b : c$, come sopra (*N.*385.), e sia la forza centripeta nel vertice dell' orbita immobile $=\frac{b^2}{AF^3}$, e s'abbia quindi in tale orbita un' Ellisse, il cui parametro primario sia $=2p$, e il cui raggio vettore per tutta l'orbita si chiami r; la differenza delle forze composte nelle due mentovate Ellissi sarà $=\frac{b^2r+pc^2-pb^2}{r^3}$ (*N.* 385.). Pongasi ora che la stessa orbita immobile $APBS$ possa essere descritta con una forza composta $=\frac{1}{r^3}+\varkappa r^m$, con una forza cioè di gravità, che stia alla prima nelle mediocri distanze $::\frac{1}{r^3}:\frac{b^2}{r^3}$, ossia $::1:b^2$, a cui si aggiunga o si sottragga una quantità $\varkappa$ minore dell' unità, che sia però una potenza qualunque m del raggio vettore, dalle quali due quantità variabili potrà risultare ancora la stessa forza totale di prima. Si formi quindi un' equazione

tra le espressioni di queste due forze, cioè sia $\frac{1}{r^3} + : = \frac{b^2 r + pc^2 - pb^2}{r^3}$, ed avrassi $b^2 r + pc^2 - pb^2 = r + \varkappa r^{m+4}$. Sia poi $AF = a$, ed $FP = r = a - t$, e quindi $r^{m+1} = \overline{a-t}^{m+1} = a^{m+1} - \overline{m+3}.a^{m+2}.t$ ec., trascurati gli altri termini per la picciolezza della differenza t, si avranno due equazioni, l'una per l'apside somma, in cui si ha $r = a$, e l'altra per qualunque altro punto dell' Ellisse, cioè

I. $b^2 a + pc^2 - pb^2 = a + \varkappa a^{m+2}$.

II. $b^2.\overline{a-t} + pc^2 - pb^2 = a - t + \varkappa a^{m+1} - \overline{m+3}.\varkappa a^{m+2}.t$, e sottratta l'una dall' altra, ne risulterà una terza.

III. $b^2 t = t + \overline{m+3}.\varkappa.a^{m+2}.t$. Accostandosi poi l'orbita sì presso al cerchio, che in luogo della quantità a e p si possa sostituire l'unità, si avrà dalla prima equazione $c^2 = 1 + \varkappa$, e dalla terza otterrassi $b^2 = 1 + \overline{m+3}\varkappa$, e sarà $b^2 : c^2 :: 1 + \overline{m+3}.\varkappa : 1 + \varkappa$, ossia $:: 1 : 1 + \overline{m+2}.\varkappa$.

COROLLARIO I.

405. Se si aggiugnerà alla gravità una forza qualunque, che sia direttamente come una potenza qualunque del raggio vettore, cioè se le quantità $\varkappa$ ed m saranno positive, sarà $b^2 > c^2$, e gli apsidi ritrocederanno, movendosi in parte contraria al moto di L. Lo stesso accaderà se le quantità m ed $\varkappa$ saranno negative, essendo $m > 2$. Se poi si toglierà una forza direttamente proporzionale ad una potenza qualunque della distanza del corpo L dal fuoco F, l'orbita ravvolgentesi intorno al centro delle forze, e gli apsidi di essa si muoveranno nelle parti conseguenti, ossia a seconda del moto di L.

COROLLARIO II.

406. Venendo la gravità di L verso T, cioè $\frac{1}{r^2}$ sminuita per l'azione di S della quantità $\frac{1}{2}n^2 r$ (*N.* 394.), indipendentemente però dal luogo degli apsidi o dei nodi, e dalla inclinazione dei piani dell'orbite di S ed L, se si assumerà costante il tempo periodico, sarà essa proporzionale al raggio vettore r. Fatto quindi $x = -\frac{1}{2}n^2$, ed $m = 1$, sarà $b^2 : c^2 :: 1 : 1 - \frac{3n^2}{2}$, ossia $b^2 : c^2 :: 1 + \frac{3n^2}{2} : 1$, e considerandovi aggiunto l'evanescente quadrato del coefficiente del secondo termine, ed estratte le radici, si avrà prossimamente $b : c :: 1 + \frac{3n^2}{4} : 1$; quando poi l'arco c sarà $= 360°$, cioè quando sia compita la rivoluzione, sarà in tale Ipotesi il progresso degli apsidi $c - b = \frac{1}{4}.n^2.360°$, e supposto il tempo periodico di L verso $T = \frac{1}{13}$ del tempo periodico di T verso S, sarà $n^2 = \frac{1}{169}$, e $\frac{1}{4}n^2 \times 360°$ si troverà $= \frac{1080°}{676} = 1\frac{1°}{2}$ circa; e prossimamente nell'intiero tempo periodico di $T = 20°$.

PROBLEMA VII.

407. Data l'inclinazione dell'orbita del corpo L col piano SFT, e dato il luogo dei nodi dell'orbita medesima nello stesso piano, assegnare generalmente qual moto debbano avere gli stessi nodi, in un dato tempo, per l'azione del corpo S (*Fig.* 139.).

RISOLUZIONE. Sia *Ll* l'arco descritto dal centro di gravità del corpo *L* nell' assegnato tempo, e chiamisi la ragione del seno tutto al seno d'inclinazione dell' orbita *ELI* col piano *EA'IS* quella di 1 : *f*, e siano i nodi situati in *E* ed *I*. Siccome le forze normali al piano dell' orbita *ELI* agiscono di continuo per tutto l'arco *ML*, ne nascerà da esse un moto accelerato della stessa orbita verso il sottoposto piano *EA'I* (*N.* 70.), e colla velocità finale di esso moto si potrà percorrere un doppio spazio (*N.* 81.). Sarà adunque la velocità della projezione, alla velocità normale nella direzione al piano dell' orbita di *L* :: *Ll* : *LO*, essendo lo spazio *LO* doppio di quello, che scorrerebbe il corpo *L* per le forze normali al piano di sua orbita, nel tempo che si percorre l'archetto *Ll*, come si è supposto di sopra (*N.*399.). Compiendosi poi il rettangolo *LOlo*, sarà *Lo* la via segnata dal corpo *L*. L'orbita adunque del corpo *L* nuterà intorno al raggio vettore *TL*, e condotta dal punto *L* ad *EI* la normale *LR*, e dal nodo *E* la retta *EK* perpendicolare alla direzione di *TL*, si avrà l'analogia che segue *Ll* : *lo* :: *EK* : all' arco, per cui si alzerà il nodo *E*, dovendo l'orbita di *L* entrare nella direzione *Lo*, il qual arco si troverà $= \frac{EK.lo}{Ll}$. Sarà ancora il seno dell' inclinazione dell' orbita *EIL* col piano *EA'I*, al seno tutto, come l'arco descritto col raggio *ET* dal punto *E* ascendente, alla retta *EZ* di retrocessione dei nodi, e s'avrà quindi $EZ = \frac{lo\,.\,\text{sen.}\,ITE\,.\,TL}{f\,.\,Ll}$. Surrogando poi in vece di *lo* = *LO* il suo valore di sopra assegnato (*N.*399.), considerata la massa *M* = 1, e denominato sen. *LTE* = sen.δ, si avrà il moto orario dei nodi

$= 3n^2 \text{ sen.}\varphi \text{ . sen.}\delta \text{ . cos.}z \text{ . } r^4 \text{ . } Ll \text{ . } \sqrt{1 - f^2 \text{sen.}^2 \varphi}$, e fatto $Ll = r.dp$; e posto in luogo di cos. z il suo valore sen. LTD, ossia sen. y, si avrà lo stesso moto orario dei nodi $= 3n^2 \text{ . sen.}\varphi \text{ . sen.}\delta \text{ . sen.}y \text{ . } r^4 \text{ . } dp \sqrt{1 - f^2 \text{sen.}^2 \varphi}$.

COROLLARIO I.

408. Potendo cadere il nodo E di quà o di là dalla quadratura D, sarà sen. $LTE =$ sen. $LTD \mp ETD =$ sen. LTD . cos. $ETD \pm$ sen. ETD . cos. LTD. Siccome poi ciascuno degli angoli ETD, CTI è $= TAG$, sarà ancora sen. $LTE =$ sen. LTD . sen. $ATE \mp$ cos. LTD . cos. ATE, ossia sen. $\delta =$ sen. y . sen. $\varphi \mp$ cos. y . cos. φ, e omesso il secondo termine, che svanisce negli opposti quadranti per l'ambiguità dei segni, e posto $r = 1$, si avrà il moto dei nodi per ciascuna rivoluzione in un'orbita prossimamente circolare $= 3n^2 \text{ . sen.}^2 \varphi \text{ . sen.}^2 y \text{ . } dp \text{ . } \sqrt{(1 - f^2 \text{ . sen.}^2 \varphi)}$. Sostituendo poi in luogo di sen.$^2 y$ il suo valore $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$. cos. $2y$, trascurato pure il termine cos. $2y$, che in una intiera rivoluzione svanisce per la ragione indicata, sapendosi la distanza del nodo E da G, sarà il moto medio ed orario del nodo E espresso dai termini seguenti $\frac{1}{2} \text{ . } n^2 \text{ . sen.}^2 \varphi \text{ . } dp \text{ . } \sqrt{(1 - f^2 \text{ . sen.}^2 \varphi)}$. Considerando poi aggiunto sotto al radicale il menomo ed evanescente quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè $+ \left(\frac{f^2 \text{ . sen.}^2 \varphi}{2}\right)^2$, estraendo la radice, e moltiplicando attualmente, sarà lo stesso moto orario dei nodi espresso prossimamente per $\frac{1}{2} \text{ . } n^2 \text{ sen.}^2 \varphi \text{ . } dp - \frac{1}{4} n^2 f^2 \text{ . sen.}^4 \varphi \text{ . } dp$.

COROLLARIO II.

409. Siccome poi la ſomma di tutt' i ſen.^{2}. $\varphi . dp$, cioè $S . \frac{1}{2} - \frac{1}{2} . \text{cof. } 2\varphi \times dp$ per una intiera circonferenza c, divenendo cof. $2\varphi = 0$, ſi trova $= \frac{1}{2} . c$, e S. ſen.$^4\varphi . dp$, oſſia $S . \frac{1}{8} - \frac{1}{8} . \text{cof. } 2\varphi + \frac{1}{8} \text{cof. } 4\varphi \times dp$, ſi riduce per conſimile ragione $= \frac{1}{8} . c$, il moto medio dei nodi in ciaſcuna rivoluzione del corpo L riſulterà $\frac{1}{4} . n^2 - \frac{2}{\pi} n^2 f^2 \times 360°$, e preſa la ragione dei tempi periodici di L ed S quella di $n : 1$, ſarà $\frac{1}{4} . n - \frac{2}{\pi} . nf^2 \times 360°$ il moto medio ed annuo, che ſi avrebbe nei nodi, ſe dopo ciaſcun' ora ſi reſtituiſſero nel ſuo luogo, ed il corpo S, dopo una intiera rivoluzione, ritornaſſe allo ſteſſo nodo, da cui ſi era partito.

COROLLARIO III.

410. Eſaminando la formola riſultata dal Problema, e volendoſi preſcindere dalla inclinazione delle orbite, tutto il moto dei nodi ſarà in ragione compoſta dei ſeni della diſtanza del corpo L dalle quadrature, e delle diſtanze dei corpi S ed L dai nodi. Poſto quindi l'angolo ATE minor di due retti, coſicchè ſia il ſuo riſpettivo ſen. φ poſitivo, trovandoſi il corpo L tra E e D, gli angoli LTE ed LTD, che ſaranno in oppoſto quadrante, avranno i loro ſen. δ e ſen. γ affetti di ſegno contrario, e il moto dei nodi ſeguirà la direzione del moto di L, oſſia vi avrà un progreſſo dei nodi. Se poi deſcriverà il corpo L, gli archi ELC, oſſia DI, riuſciranno poſitivi i mentovati ſeni, cioè ſen. γ, ſen. δ, e vi avrà un regreſſo dei nodi per rapporto al moto

di L. Saranno poi ſtazionarj nel caſo che ſi trovino eſſi nodi nelle ſiſigie, oppure quando in qualunque ſituazione di eſſi, ſi troverà il corpo L nelle quadrature con S, o nella linea ſteſſa dei nodi, eſſendo in ciaſcuno di queſti tre caſi uno dei tre angoli ATE, LTE, $LTD = 0$. Siccome poi il corpo L ſi troverà per più tempo tra i punti D ed I, oſſia tra E e C, che tra i punti D ed E, C ed I, nell' intiera rivoluzione di L, ne riſulterà un regreſſo dei nodi.

PROBLEMA VIII.

411. Aſſegnare nella ſteſſa Ipoteſi il moto totale ed annuo dei nodi dell' orbita di L (*Fig.* 139.).

RISOLUZIONE. Sia dp il moto angolare del corpo L ed ndp quello di S, e prendaſi $\frac{1}{4}.n^2.\text{ſen.}^2.\varphi.dp$ per eſpreſſione del moto medio di un nodo, traſcurandoſi l'inclinazione dell' orbita di L col piano $EIA'S$. Allorchè il nodo E col ſuo regreſſo nel piano ſuddetto, ſi approſſima al corpo S, che ad eſſo ſi fa incontro, ſarà $ndp - \frac{1}{4}.n^2.\text{ſen.}^2\varphi.dp$ il moto, con cui il corpo S ſi accoſterà allo ſteſſo nodo, e introdotta queſta quantità nel primo termine che eſprime il moto medio del nodo, in luogo di ndp, ſi avrà $\frac{1}{4}.\text{ſen.}^2\varphi\,(ndp - \frac{1}{4}.n^2.\text{ſen.}^2\varphi.dp) = \frac{1}{4}.n^2.\text{ſen.}^2\varphi.dp - \frac{1}{16}.n^4.\text{ſen.}^4\varphi.dp$ per il valore del moto del nodo E verſo S. Il moto poi, con cui ſi accoſterà il corpo S allo ſteſſo nodo, ſarà $ndp - \frac{1}{4}.n^2.\text{ſen.}^2\varphi.dp + \frac{2}{16}.n^4.\text{ſen.}^4\varphi.dp$, e ſoſtituito ancora in luogo di ndp, nella prima eſpreſſione del moto del nodo, il valore $ndp - \frac{1}{4}.n^2.\text{ſen.}^2\varphi.dp + \frac{2}{16}.n^4.\text{ſen.}^4\varphi.dp$, e ripetendo così di ſeguito le ſteſſe operazioni, l' intiero e total moto di accoſtamento del corpo S e del nodo E ſarà ndp

$\times 1 - \frac{1}{4}.n.\text{sen.}^2\varphi + \frac{5}{4}.n^2.\text{sen.}^4.\varphi - \frac{37}{8}.n^3\,\text{sen.}^6\varphi$ ec. Quindi sostituendo i valori di $\text{sen.}^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{cos.}\,2\varphi$ di $\text{sen.}^4.\varphi = \frac{1}{8} - 2.\text{cos.}2\varphi + \frac{1}{8}.\text{cos.}4\varphi$, e di $\text{sen.}^6\varphi = \frac{5}{32} - \frac{21}{32}.\text{cos.}\,2\varphi + \frac{7}{32}.\text{cos.}\,4\varphi - \frac{1}{32}.\text{cos.}\,6\varphi$, omesse le quantità moltiplicate per cos. 2φ, cos. 4φ, cos. 6φ, che in una intiera rivoluzione si trovano $=0$, l'espressione del moto del corpo S, tra le due congiunzioni di esso con i nodi, risulterà $360^\circ.\times 1 - \frac{1}{4}.n + \frac{27}{32}.n^2 - \frac{119}{128}.n^3$ ec., ed il moto del nodo E, contrario a quello di S, si troverà $360^\circ.\times \frac{1}{4}.n - \frac{27}{32}n^2 + \frac{119}{128}.n^3$ ec.

PROBLEMA IX.

412. Dato il moto orario dei nodi, trovare la variazione oraria dell' inclinazione dell' orbita di L col piano $EIA'S$ (*Fig.* 144).

Risoluzione. Si alzi dal centro T dell' orbita del corpo L, supposta circolare, la TO normale al piano $ABCD$, la quale sia pure eguale al raggio TL. Supponendosi che il piano $ABCD$ si muova intorno a TO, il moto angolare di esso piano sarà eguale al moto angolare della retta TO, la quale rimanga tuttora perpendicolare al piano suddetto. L' arco poi, per cui ritrocede il nodo E nel piano $EIA'S$ sta all' arco, che descrive il punto E del primo nodo, per la nutazione del piano ELI intorno a TL, come il seno tutto al seno dell' inclinazione dell' orbite, ossia $:: 1 : f$; sarà ancora questo secondo arco, all' arco Oo descritto nello stesso tempo dal punto O intorno al raggio TO, come il raggio ER al raggio $TO :: LG : TO$. Se s'intenderà poi condotta NT normale a TL ed MT perpendicolare alla linea dei nodi EI, siccome il moto del punto O in qualun-

que minimo tempetto, ſi può conſiderare come rettilineo, e parallelo alla retta NT, colla riſoluzione di eſſo ſi troverà il moto, che avrà una direzione parallela ad MT, e quello che riſulterà intorno alla linea dei nodi, per cui ſi accreſcerà o ſi diminuirà l'inclinazione dell' orbita di L col piano $EIA'S$. Eſſendo poi retti gli angoli MTE, NTL, ſarà l'angolo $LTE = MTN$, e il moto totale del punto O al moto di eſſo parallelo alla retta TM, ſarà come $TN : TP :: TL : TG$, e componendo le ragioni, ſarà il moto orario dei nodi alla variazione oraria dell' inclinazione :: $TL . LG : f . TG . TO :: LG : TG . f$, oſſia come ſen.$LTE$: f.coſ.LTE. Se il moto adunque dei nodi ſi aſſumerà proſſimamente $-3n^2$. ſen.φ.ſen.δ.ſen.$y . r^4\, dp$ (*N.*407.), ſoſtituito al luogo di ſen. δ il valore f.coſ. δ, ſi avrà la variazione oraria dell' inclinazione dell' orbita ELI col piano $EA'IS$ eſpreſſa per $-3n^2 r^4$ ſen.φ.ſen.$y . f$.coſ.$\delta . dp$.

COROLLARIO I.

413. Avendoſi un regreſſo dei nodi dell' orbita di L nel piano ſottopoſto $EA'IS$, ſi ſminuirà ancora l'inclinazione dell' orbite del corpo S e di L. Abbaſſata quindi dal centro di L una perpendicolare K ſul piano $EA'IS$, ſarà l'inclinazione delle due orbite in ragione diretta di K, e inverſa della diſtanza dalla linea dei nodi, oſſia ſarà $f = \frac{K}{LR} = \frac{K}{\text{ſen. } LTE}$, fatto il raggio $= 1$, e il regreſſo dei nodi al decremento dell' inclinazione dell' orbita di L, che ſuperiormente ſi era trovata :: ſen. LTE : f . coſ. LTE, ſoſtituito il valore di f, e di ſen. LTE = ſen. δ, riſul-

terà :: sen. δ : $\frac{K \cdot \text{cos.}\,\delta}{\text{sen.}\,\delta}$, ossia :: sen.$^2\,\delta$: K . cos. δ. Sarà poi eguale la variazione dell' angolo d' inclinazione al moto del nodo, se sarà sen. δ media proporzionale tra K e cos. δ.

COROLLARIO II.

314. Se i nodi dell' orbita di L saranno distanti da S per un intiero quadrante, ponendosi sen. $\varphi = 1$, si avrà il moto dei nodi $-3n^2$ sen.$^2\,\delta\sqrt{1-f^2}.dp$ (*N.* 408.), ed essendo il moto dei nodi alla variazione che segue allo stesso tempo nell' inclinazione, come sen. $LTE : f$. cos. LTE :: sen. $\delta : f$. cos. δ, sarà la stessa variazione espressa per $-3n^2 f$. sen. δ . cos. δ . $\sqrt{1-f^2}.dp$.

COROLLARIO III.

415. Si è trovato superiormente (*N.* 408.) sen. LTE = sen. LTD . sen. $ATE \mp$ cos. LTD . cos. ATE, e similmente, giusta le note formole dei seni e coseni, si ricava cos. LTE = cos. LTD . sen. $ATE \pm$ sen. LTD . cos. ATE. Svanendo poi per l'ambiguità dei segni in un intiero semicerchio DAC, i termini moltiplicati per cos. LTD, omessi gli equemoltiplici di sen. LTD, si avrà l'analogia sen. $\delta : f$. cos. δ :: sen. $\varphi : f$ cos. φ. Adunque nella data distanza del nodo E da S, preso il moto medio orario dei nodi (*N.* 408.) cioè $-\frac{3n^2}{2}$. sen.$^2\,\varphi\sqrt{1-f^2.\text{sen.}^2\,\varphi}.dp$, si avrà l'inclinazione media dell' orbita del corpo L dopo una intiera rivoluzione espressa per $-\frac{3n^2}{2} f$. sen. φ . cos. φ . $dp = -\frac{1}{4} n^2 f$ sen. 2 $\varphi . dp$, omessa la quantità $\sqrt{1-f^2.\text{sen.}^2\,\varphi}$, che involge la primiera data inclinazione

che quivi non ſi conſidera. Se i nodi quindi ſaranno nelle quadrature o nelle ſiſigie con *S*, ſvanendo coſ.φ, o il ſeno dello ſteſſo angolo, la variazione dell' inclinazione ſarà nulla, e maſſima ſi avrà ſe i nodi ſaranno negli ottanti, nei quali ſi ha il maſſimo valore di ſen. 2φ, con tal legge però, che quando il nodo aſcendente *E* paſſerà dalle ſiſigie alle quadrature di *S*, ſuccedendo ſen. φ negativo, che gradatamente ſi accreſce ſino alle quadrature, ſcemeraſſi la detta inclinazione, ed accreſceraſſi nel paſſaggio del nodo *E* dalla prima quadratura alla proſſima ſiſigia, ed in ogni ſemirivoluzione poi ſi reſtituirà al luogo primiero.

SCOLIO.

416. Se ſi combineranno poi inſieme tutte le formole di queſte diſuguaglianze, ne riſulteranno altrettante equazioni, con cui ſi potrà determinare ogni moto del corpo *L*, e ſi potranno formare le Tavole periodiche del ſito, orbita e corſo di eſſo, il che s'appartiene poi propriamente all' Aſtronomia.

INDICE

DEI CAPI CONTENUTI NELL' OPERA.

PARTE PRIMA.

Capo I. Del Moto equabile. pag. 3
II. Del Momento. 7
III. Del Centro di gravità. 10
IV. Del Moto composto da più equabili. 18
V. Delle Macchine che facilitano il moto. 32
VI. Del Moto accelerato, e ritardato. 62
VII. Della Discesa libera dei corpi per i piani inclinati. 81
VIII. Dell' Attrito. 106

PARTE SECONDA.

IX. Del Moto Curvilineo in genere. 114
X. Del Moto dei Projetti, nell' Ipotesi della Gravità costante. 130
XI. Della Rivoluzione dei corpi nel Cerchio. 146
XII. Della Rivoluzione dei corpi nell' Ellisse, e nell' Iperbola per una forza, che gli attrae al fuoco di essa. 156
XIII. Della Rivoluzione dei corpi nella Parabola, per una forza che gli attrae al fuoco di essa. 180
XIV. Metodi per determinare le Curve particolari, che seguir devono i Projetti, nell' Ipotesi che la gravità segua la ragione inversa duplicata delle distanze dal centro delle forze. 191
XV. Della Cicloide, e dei Pendoli. 206
XVI. Della Percossa 229
XVII. Dei Centri di gravità determinati coll' uso del calcolo sommatorio, e della regola Guldiniana. 243
XVIII. Dei Centri di Oscillazione e di Percussione. 262
XIX. Del Moto di Rotazione. 282
XX. Della Rivoluzione di più corpi, che si attraggono vicendevolmente. 302

		Errori.	Correzioni:
Pag. 22.	lin. 28.	vengono	vengano
Pag. 36; 43; 45; 46; 50		*Aſs.* 4.	*Aſs.* III.
Pag. 153.	lin. 3.	centiripeta	centripeta
Pag. 174.	lin. 10.	è eguale al	eſprime il
	lin. 12.	minima	quadrata
Pag. 242.	lin. 14.	$m+2$	m^2+m
Pag. 246.	lin. 18.	Ho	HO
Pag. 321.	lin. ult.	inverſamente	direttamente
Pag. 326.	lin. ult.	$\frac{\overline{LI}^2}{TL}$	$\frac{\overline{LI}^2}{\overline{TL}^2}$

Xx 1462275

Digitized by Google

Tav. I

Fig. 3

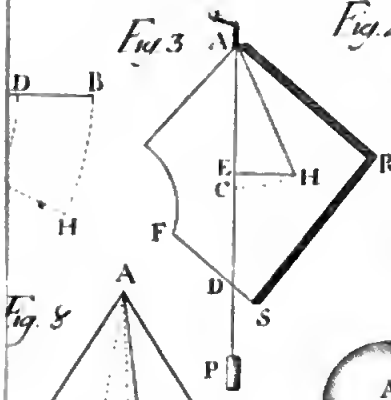


Fig. 4

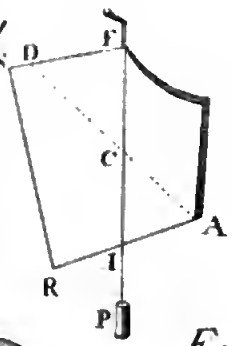


Fig. 5

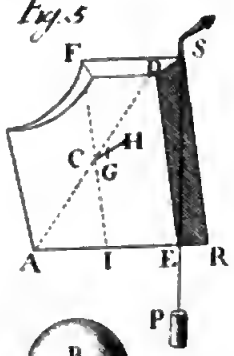


Fig. 8

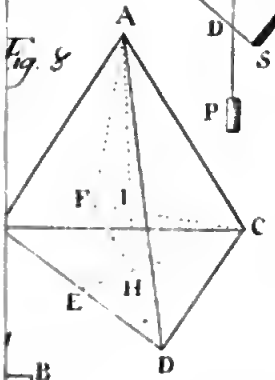


Fig. 9

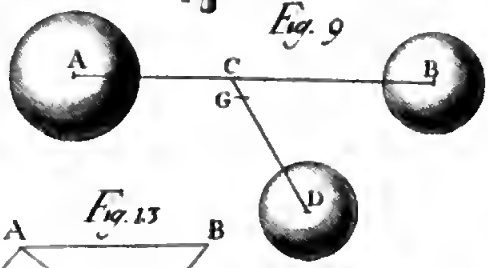


Fig. 13

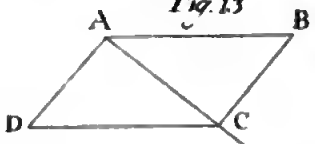


Fig. 14

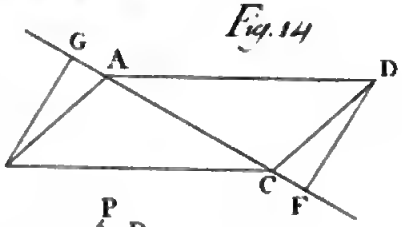


Fig. 12

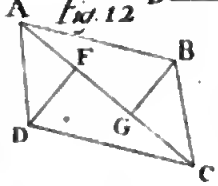
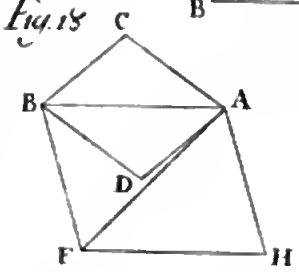
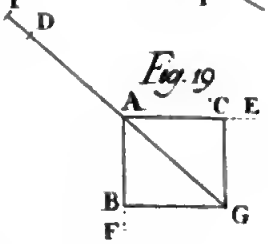


Fig. 15





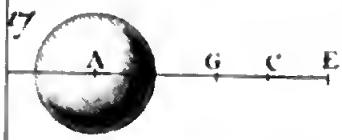


Fig. 23

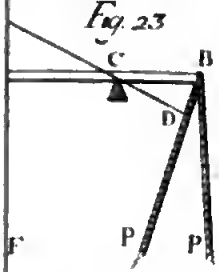


Fig. 24

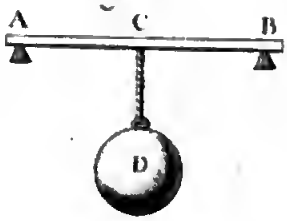


Fig. 25

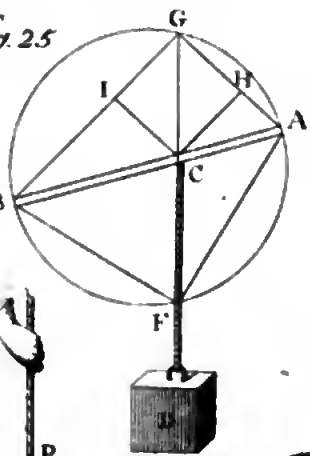
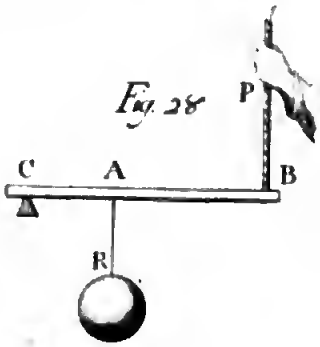


Fig. 28



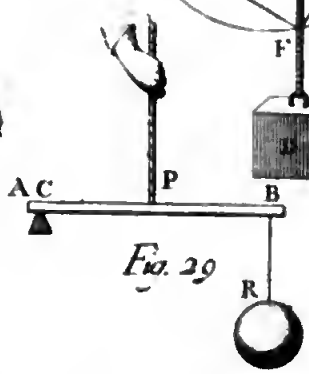
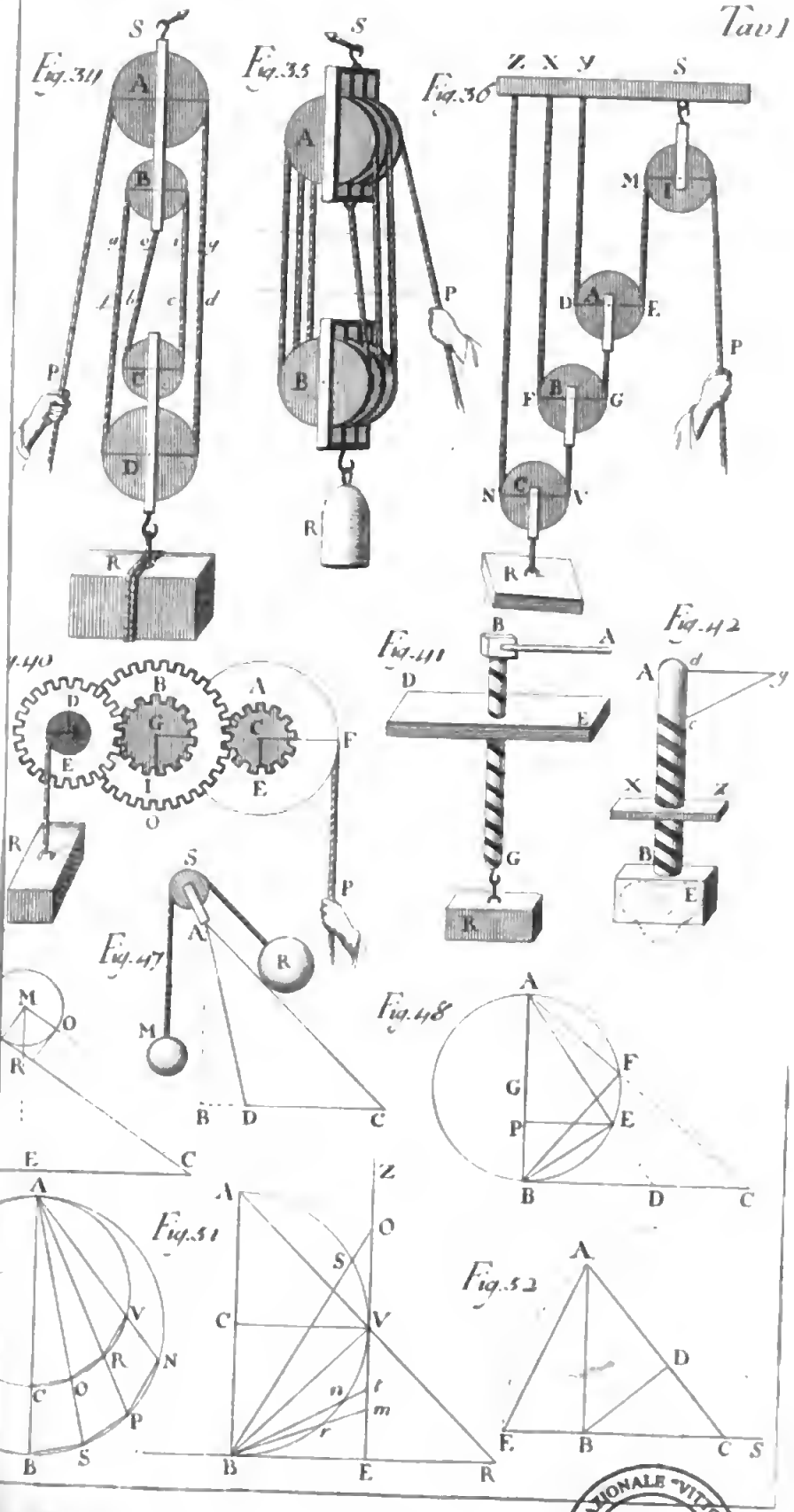


Fig. 29

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Fig. 56

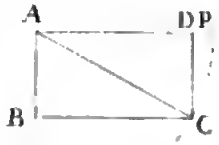


Fig. 57.

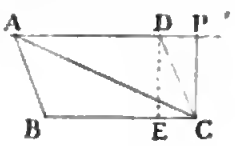


Fig. 59

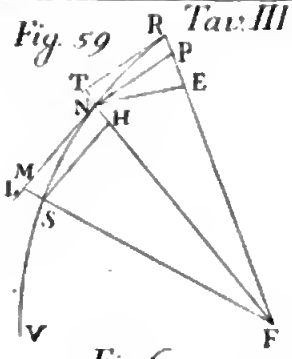
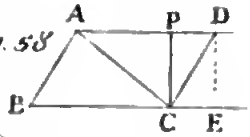


Fig. 58



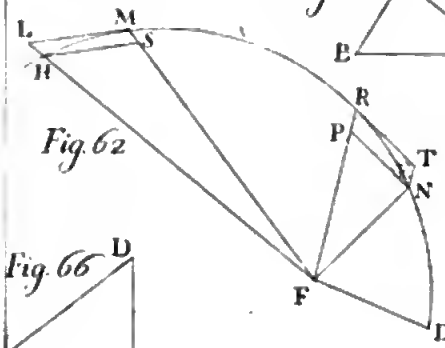


Fig. 62

Fig. 63

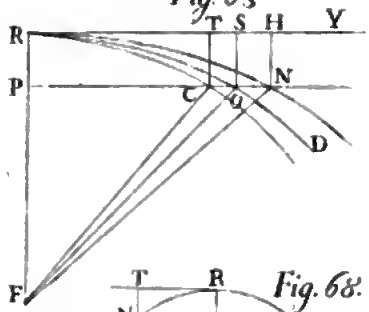


Fig. 66

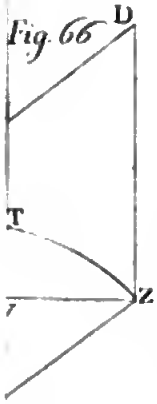


Fig. 67.

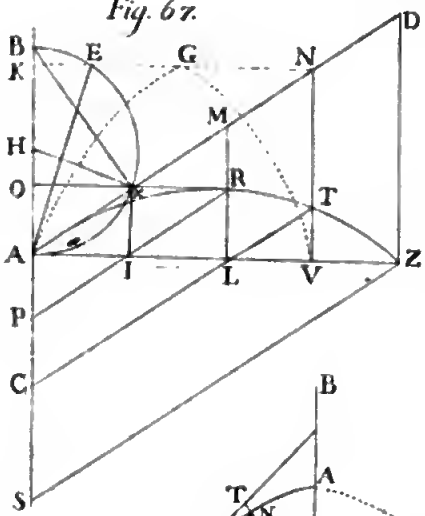


Fig. 68.

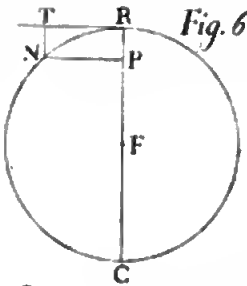


Fig. 69

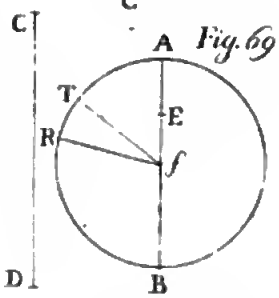


Fig. 71

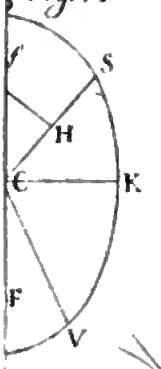


Fig. 75

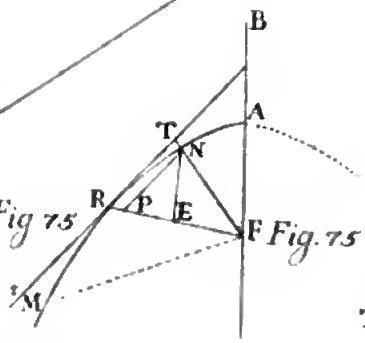
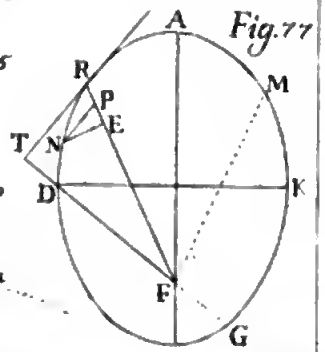


Fig. 77



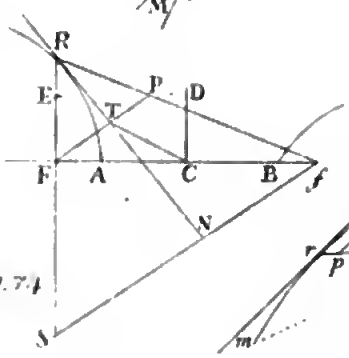


Fig. 74

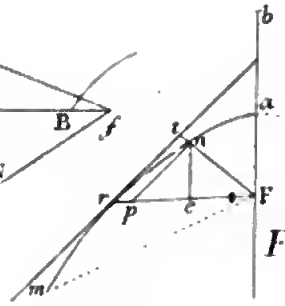


Fig. 76

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

Tav. IV.

Fig. 81

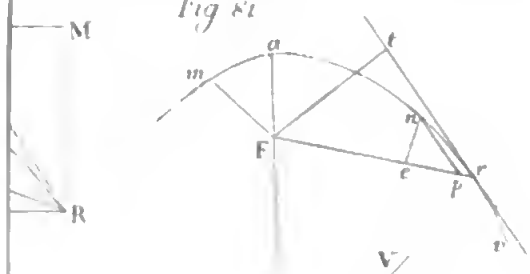
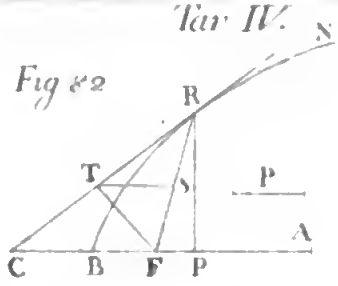


Fig. 82



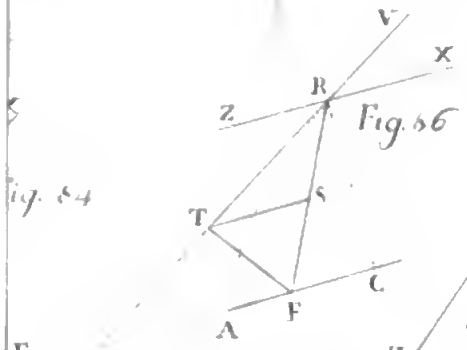
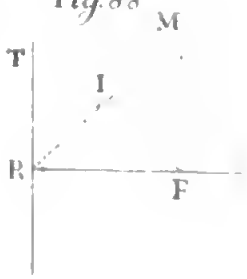


Fig. 86

Fig. 84

Fig. 87

Fig. 88



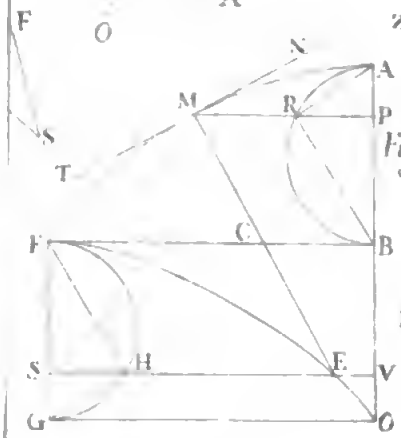


Fig. 91

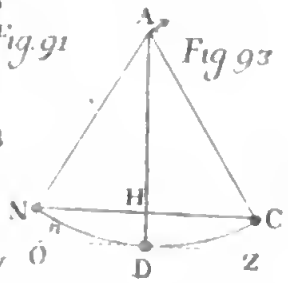


Fig. 93

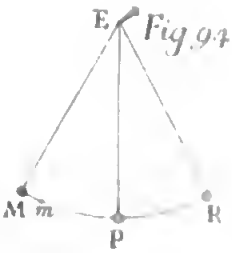


Fig. 94

Fig. 92

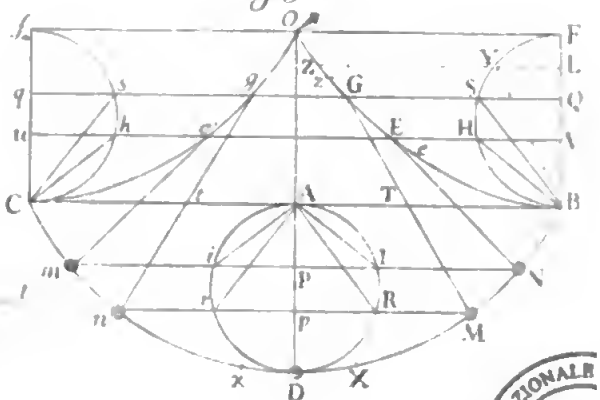


Fig. 97

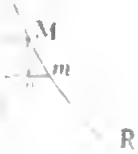


Fig. 104

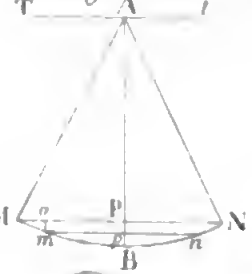


Fig. 102

BIBLIOTECA NAZIONALE
NAP

Digitized by Google

Fig. 107.

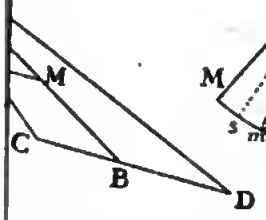


Fig. 108

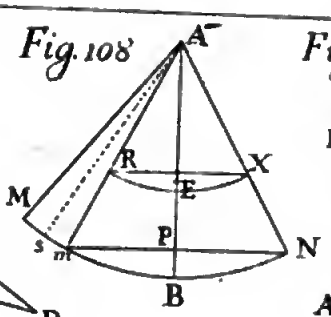


Fig. 109

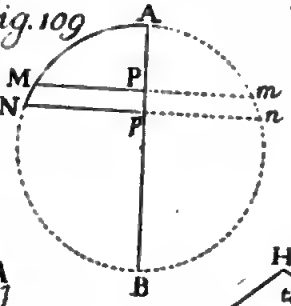


Fig. 110

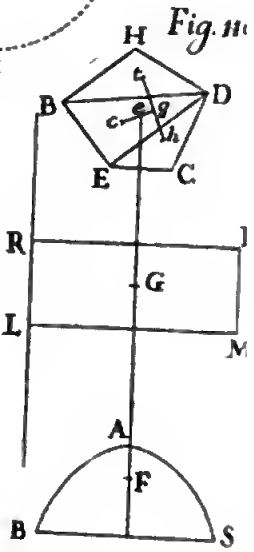


Fig. 111

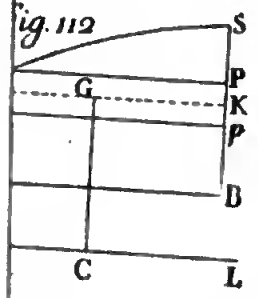


Fig. 113

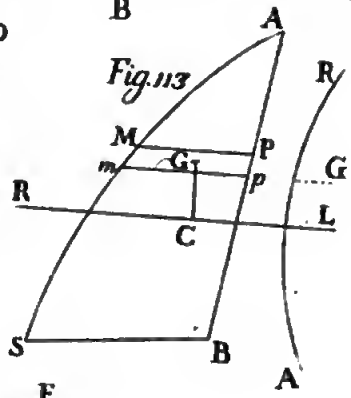


Fig. 114

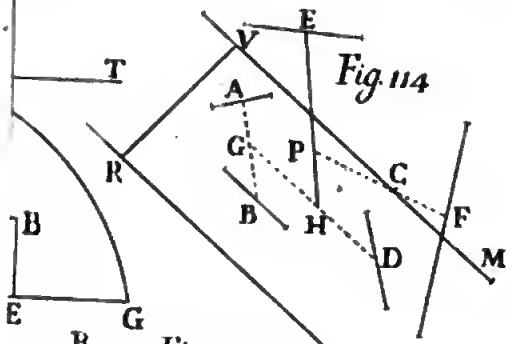


Fig. 115

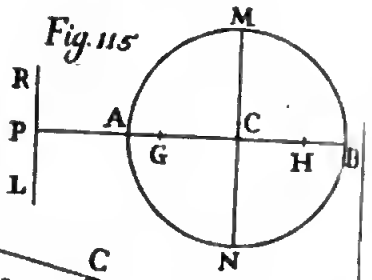


Fig. 120

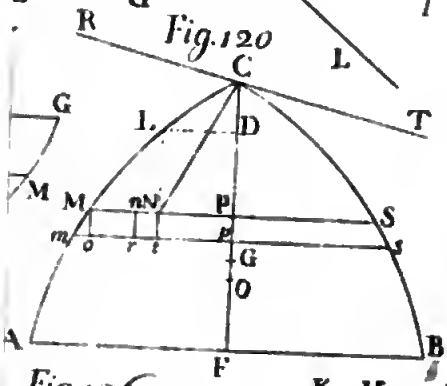


Fig. 121

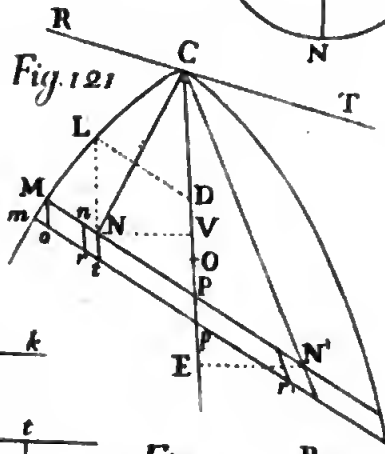


Fig. 126

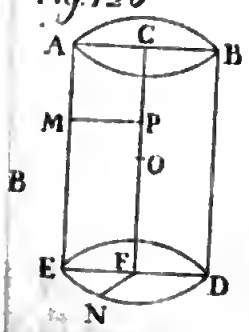


Fig. 127

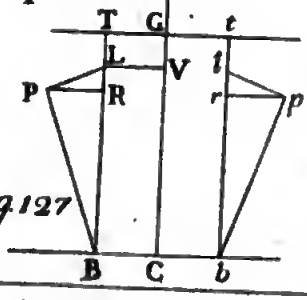
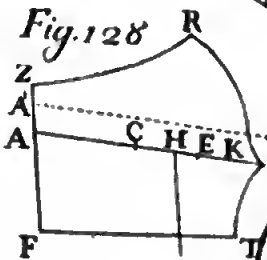


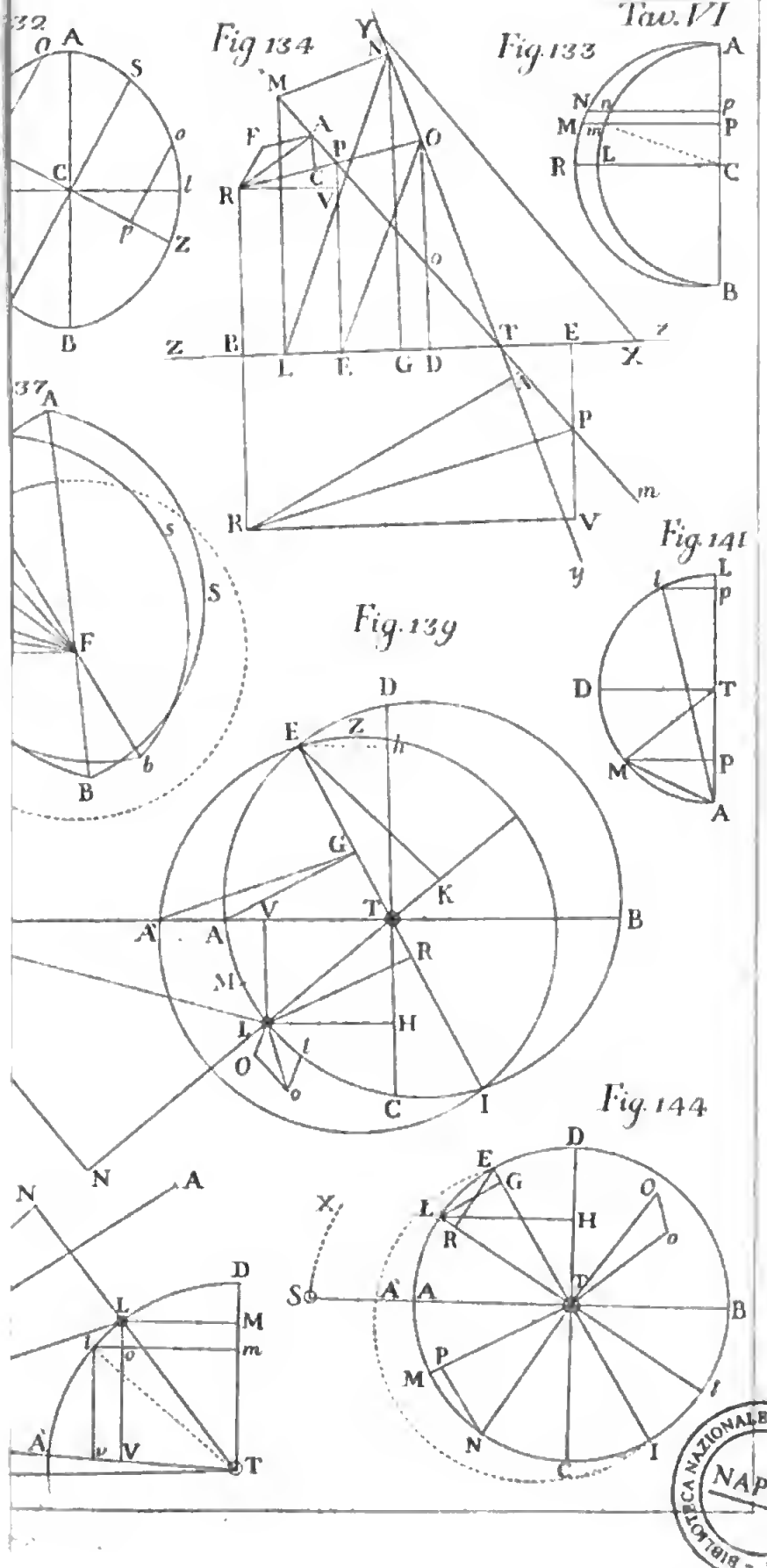
Fig. 128



BIBLIOTECA NA...

Digitized by Google

Tav. VI



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Digitized by Google

34
9
4

Digitized by Google

Digitized by Google